Tarihte bilindiği kadarıyla düzlem geometrisinin ilk kez sistemli bir biçimde incelenişi, Öklid'in Elementler kitabının (M.Ö. 300) birinci cildinde yapıldı. Öklid bu kitapta düzlem geometrisini beş belit (aksiyom, postüla) üstüne kurar. Bu belitlerden başlayarak ve sıraladığı birkaç mantıksal olguyu kullanarak düzlem geometrisinin teoremlerini ispatlar. Bu belitler nokta, doğru ve çember denen nesnelerin var ve açı ve dik açı denen kavramların tanımlı olduğu durumda şu kabulleri yapar:

1. Bir noktadan bir noktaya bir doğru çizilebilir (ve bu doğru tektir).
2. Bir doğru içinde bir doğru parçası (tek bir biçimde) genişletilebilir.
3. Merkez noktası ve yarıçapı verilmiş bir çember çizilebilir (ve bu çember tektir).
4. Tüm dik açılar birbirlerine eşittir.
5. İki doğruyu kesen bir doğrunun aynı tarafında oluşan iki açı da dik açıdan küçükse o iki doğru o tarafta er ya da geç bir noktada kesişir.

Bu beş belitten ilk dördü yerel özelliklidir, yani bu belitlerde geçen nesneler verildiği anda düzlemde yeterince büyük bir daire içinde bu nesneler yerleştirilip belitin inandırıcılığı sınanabilir. Oysa beşinci belitteki açılar ve doğru parçaları verildiğinde, varlığı iddia edilen kesişim noktası belirsiz uzaklıklarda olabilir. Beşinci belite mantıksal olarak denk başka bir önerme şöyle:

($5'$) *Bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir.*

Beşinci belitin yerel olmayan bir ifade taşıdığı bu cümlede açıkça görülüyor. Buradaki paralellik kavramı sınanabilir bir şey değil. Bu yüzden beşinci belit (paralel beliti) yüzyıllar boyunca diğerlerinden ayrı tutuldu ve şüpheyle karşılandı. Diğer belitler kullanılarak ispatlanmaya çalışıldı. 19. yüzyılda tam anlamıyla kurulan başka geometriler, paralel belitinin diğerlerinden bağımsız olduğunu ve bir geometri için vazgeçilmez olmadığını göstermiş oldu. İşte biz de bu derslerde paralel belitini sağlamayan, yani *Öklit dışı* bir geometri kuracağız. İzdüşümsel geometri adı verilen bu geometride birbirinden farklı iki doğru mutlaka bir ve yalnız bir noktada kesişecek, paralellik olası olmayacak.

Bu geometriyi doğrusal cebiri temel alan bir model aracılığıyla inşa edeceğiz. İlk beş derste inşa edilen bu geometrinin sağladığı temel özellikleri çalışacağız. Bu arada bir miktar topoloji konuşup bazı izdüşümsel geometrileri topolojik olarak inceleyeceğiz. Altıncı derste bir izdüşümsel geometriyi belitlerle kurmanın yollarını konuşacağız ve sonlu tane noktadan oluşan geometrilere bakacağız. Sonraki iki derste, Öklit geometrisindeki elips, parabol, hiperbolle ilişkili konik denen eğrileri tanıyacağız. Dokuz ve onuncu derslerde yönümüz biraz reel cebirsel geometriye kayacak. İzdüşümsel geometride cebirsel eğrilerin topolojisi hakkında konuşacağız.

Bu ders notları Boğaziçi Üniversitesi'nde iki kez verdiğim İzdüşümsel Geometri dersinde yoğrulup bir bütün haline gelen düşünceleri içeriyor. Burda teorinin yalnızca temellerini kuruyoruz. Daha ayrıntılı çalışmalar başka bir dersin konusu. Bu ders Doğrusal Cebir almış ve Topoloji ile biraz tanışıklığı olan öğrencilerin kolaylıkla izleyebileceği düzeyde. Bu metnin bir ders kitabı değil ders notu olduğu unutulmamalı. Dolayısıyla okuyucuyu aktif okumaya ve düşünmeye yönlendirmeye çalıştık. Derslerin akışı sırasında (sınıfta olduğu gibi) birçok küçük teknik boşluk çıkıyor. Bunların kimilerini alıştırma olarak ayırdık. Kimi zaman akışın kenarında kalmış soruları da alıştırma olarak bıraktık. Yıldızla işaretlenmiş alıştırmalar daha çok düşünme ve araştırma gerektirebilecek olanlar. Derslerin aralarında dört sınav var. Tüm bunlarla birlikte bu notlar, lisans düzeyinde bir izdüşümsel geometri dersinin -kaynağı olmasa da- rehberi olabilecek nitelikte.

Bu derslerin verilişi sırasında sınıfta dersi dikkatle dinleyen, sorular soran ve yanlışları düzelten öğrenciler olmasa bu notların ortaya çıkması zor olurdu. Bu yüzden derslerime aktif olarak katılan tüm öğrencilere çok teşekkür ediyorum. Elbette bu ders notları gelişmeye ve düzeltilmeye açık. Bunları kullanırken karşılaştığınız hataları iletmeniz notların kalitesini yükseltecektir.

İçindekiler

Ders 1: İzdüşümsel geometri için bir model

Bir geometriyi ya belitleriyle ya da bir modelle kurabiliriz. İzdüşümsel geometrinin belitlerle inşasını sonraya bırakarak bu derste bir izdüşümsel geometri modeli üzerine konuşacağız. Bu modeli üç boyutlu bir vektör uzayında doğrusal cebir kullanarak kuracağız. Önce bu modelde *nokta* ve *doğru* nesnelerini tanımlayarak başlıyoruz.

1.1 Doğrusal cebirle izdüşümsel geometri

$\mathbb{F}$ bir cisim, V ise $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Tanım 1. *V'nin 1 boyutlu doğrusal altuzaylarının kümesine V'nin izdüşümsel uzayı diyeceğiz ve $P(V)$ olarak göstereceğiz. $P(V)$'nin her bir elemanı, izdüşümsel geometride bir* nokta *olacak. l, V'nin 1 boyutlu bir altuzayı olsun. $P(V)$'de tarif ettiği noktayı n_l olarak göstereceğiz.*

V uzayı $n+1$ boyutlu iken $P(V)$'nin boyutuna n diyeceğiz. $n = 1$ iken $P(V)$'ye izdüşümsel doğru*, $n = 2$ iken $P(V)$'ye* izdüşümsel düzlem *denir.*

U uzayı V'nin $k+1$ boyutlu bir altuzayı olsun. U'nun tüm 1 boyutlu doğrusal altuzaylarının kümesi $P(U)$'ya $P(V)$'nin k boyutlu bir doğrusal altuzayı *denir. $k = 1$ durumunda $P(U)$'ya $P(V)$'de bir doğru denir. $k = 2$ durumunda $P(U)$'ya $P(V)$'de bir düzlem denir.*

1 boyutlu l altuzayı 2 boyutlu U altuzayının bir altuzayı ise izdüşümsel geometride n_l noktası $P(U)$ doğrusunun üzerinde*, ya da $P(U)$ doğrusu n_l noktasını* içeriyor *diyeceğiz.*

Bundan böyle yalnızca altuzay dendiğinde V'nin altuzayı anlaşılmalı. Sıklıkla $\mathbb{F}$ cismini $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olarak düşüneceğiz. Şimdi bu yeni nesnelerle birkaç gözlem yapalım.

Sav 1. *Eğer boyut$(V) = n \geq 3$ ise $P(V)$'de bir doğru ve doğrunun üstünde olmayan bir nokta vardır.*

Kanıt. $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ kümesi V için bir taban olsun. $\{v_0, v_1\}$'in gerdiği altuzay U ve v_2'nin gerdiği altuzay l için $P(U)$ doğrusu n_l noktasını içermez. □

Yukarıdaki kanıtta n_l noktasını tarif eden $v_2 \in V$ vektörüne n_l'nin bir *temsilcisi* denir ve $n_l = [v_2]$ diye yazılır.

Sav 2. *Eğer boyut$(V) = n \geq 2$ ise $P(V)$'de herhangi bir izdüşümsel doğru en az üç farklı nokta içerir.*

Kanıt. $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ kümesi V için bir taban olsun. $[v_0]$, $[v_1]$ ve $[v_0 + v_1]$ $P(V)$'de üç ayrı noktadır. □

Sav 3. *Bir izdüşümsel uzayda farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.*

Kanıt. n_p ve n_q izdüşümsel geometride farklı iki nokta olsun, yani p ve q, V'nin 1 boyutlu altuzayları olsun. $v_p, v_q \in V$ sırasıyla p ve q uzaylarını geren birer vektör olsun. p ve q birbirinden farklı olduğundan, v_p ve v_q doğrusal bağımsızdır. Bunların birlikte gerdiği U altuzayı 2 boyutludur, p ve q'yu içerir; üstelik p ve q'yu içeren her 2 boyutlu altuzay U ile çakışır. Dolayısıyla izdüşümsel geometride $P(U)$ doğrusu n_p ve n_q'dan geçen doğrudur ve tektir. □

$P(V)$'de x ve y noktalarından geçen doğruyu xy olarak göstereceğiz.

Alıştırma 1. *Yukarıdaki sav $P(V)$'de iki farklı noktanın her zaman eşdoğrusal olduğunu söylüyor. Oysa üç farklı nokta her zaman eş doğrusal olmak zorunda değil. Üç noktanın eşdoğrusal olması için bir gerek yeter koşul yazın. $P(V)$'de eşdoğrusal olmayan üç noktanın eşdüzlemsel olduğunu gösterin.*

Şimdi paralel belitinin izdüşümsel geometride artık geçersiz olduğunu görelim.

Sav 4. *İzdüşümsel düzlemde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir.*

Kanıt. Burada $P(V)$ 2 boyutlu olduğundan V, 3 boyutlu bir vektör uzayı. $P(U)$ ve $P(W)$ iki farklı doğru ise U ve W uzayları V'nin 2 boyutlu farklı altuzaylarıdır. U için bir taban $\{u_1, u_2\}$, W içinse $\{w_1, w_2\}$ olsun. $M = [u_1 u_2 w_1 w_2]_{3\times 4}$ matrisinin rankı 3'tür. Yani

$$au_1 + bu_2 + cw_1 + dw_2 = 0$$

eşitliğini sağlayan en az biri sıfırdan farklı $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ vardır. Bu durumda

$$y = au_1 + bu_2 = -cw_1 - dw_2$$

olur. u_1 ve u_2 doğrusal bağımsız olduğundan y vektörü sıfırdan farklı. Ayrıca y hem V hem W'nun içinde. Üstelik $U \cap V$'de yer alan her y yukarıdaki eşitliği sağlayan a, b ve c, d'lerle veriliyor. Başka a, b, c, d'ler için bulunacak vektörler y ile doğrusal bağımlı olacak, çünkü, a, b, c, d şu eşitliği sağlamalı:

$$M[a\ b\ c\ d]^T = 0$$

yani $[a\ \ b\ \ c\ \ d]^T$ vektörü M matrisinin sıfır uzayında olmalı. M'nin rankı 3 olduğundan sıfır uzayı $4 - 3 = 1$ boyutlu. Dolayısıyla $[y]$ noktası, $P(U) \cap P(V)$ içindeki biricik nokta. □

Sav 3 ve Sav 4'teki önermelerin birbirilerine çok benzediğini gözden kaçırmayın. Buna ileride *ikilik* diyeceğiz. Sav 4'ün bir sonucu olarak hemen şunu yazabiliriz.

Sonuç 5. *Herhangi bir izdüşümsel uzayda farklı iki doğru en fazla tek bir noktada kesişir.*

Sav 6. *Herhangi bir izdüşümsel uzayda dört farklı nokta x, y, z, w olsun. Eğer xy ve zw doğruları kesişiyorsa xz ve yw doğruları da kesişir.*

Alıştırma 2. *Sav 6'yı kanıtlayın.*

Alıştırma 3. *Bir izdüşümsel düzlemde en az 4 nokta olduğunu kanıtlayın.*

Alıştırma 4. *Bir izdüşümsel doğruda ne zaman en az dört nokta vardır?*

1.2 Homojen koordinatlar

V vektör uzayı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde ve $n+1$ boyutlu olsun. $[v] \in P(V)$ noktasını daha açık anlatmak için gösterimde v'nin koordinatlarını kullanacağız. $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ kümesi V için bir taban olsun. Eğer $v = a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ise $[v] \in P(V)$ noktasını aynı zamanda $[a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$ diye yazacağız. Herhangi bir $\lambda \in \mathbb{F}$ için $[\lambda v] = [v]$ olur çünkü $\lambda v = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$ vektörüyle v vektörü V'nin aynı 1 boyutlu altuzayını geriyor. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$'ye *homojen koordinatlar* denir; böylece

$$P(V) = \{[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \,|\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}, \text{en az bir } a_i \neq 0\}$$

yazabiliriz. Dikkat: $[0 : 0 : \ldots : 0]$ bir şey ifade etmiyor çünkü $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ vektörü 1 boyutlu bir altuzay germiyor.

Homojen koordinatlar yardımıyla $P(V)$'nin elemanlarını inceleyeceğiz. $P(V)$'nin şu alt kümesine bakalım:

$$A_0 = \{[a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \,|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}, a_0 \neq 0\}.$$

Şimdi, $[\lambda v] = [v]$ olduğu için

$$\begin{aligned} A_0 &= \{[1 : a_1/a_0 : \ldots : a_n/a_0 \,|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}, a_0 \neq 0]\} \\ &= \{[1 : b_1 : \ldots : b_n] \,|\, b_i \in \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

olur. Bu son küme $\mathbb{F}^n$ ile küme olarak birebir eşlenebilir.

$P(V)$'de A_0'ın tümleyenine bakalım:

$$P(V) \setminus A_0 = \{[0 : a_1 : \ldots : a_n] \,|\, \text{en az bir } a_i \neq 0\}.$$

$V_0 \subset V$ vektör uzayı $v_1, \ldots, v_n$ tarafından gerilen altuzay olsun. Bu durumda $P(V_0)$ ile $P(V) \setminus A_0$ küme olarak birebir eşlenebilir. Dolayısıyla

$$P(V) = A_0 \bigcup P(V) \setminus A_0 = \mathbb{F}^n \bigcup P(V_0)$$

imiş. Yani $P(V)$'nin içinde küme olarak bir $\mathbb{F}^n$ cismi ve tümleyeni olarak $n-1$ boyutlu bir izdüşümsel uzay oturuyormuş. Burdaki A_0 kümesine bir *yama*, $P(V_0)$ kümesine *sonsuzdaki altuzay* denir.

Tüm bu bilgiler $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ durumunda $P(V)$ üzerine koyacağımız bir topolojiyle birlikte anlam kazanacak ve mükemmel bir resme dönüşecek.

Alıştırma 5. $\mathbb{R}P^2 = [x0 : x1 : x2] | x_i \in \mathbb{R}$ *düzleminde sonsuzdaki* $l = \{z_2 = 0\}$ *doğrusunu ve* $a_2 \neq 0$ *olmak üzere* $P = [a_0 : a_1 : a_2]$ *ve* $Q = [b_0 : b_1 : 0] \in L$ *noktalarını alalım.* P*'den geçen tüm doğruların homojen koordinatlarda denklemlerini yazın. Aynı şeyi* Q *için yapın;* Q*'dan geçen doğruları* $\mathbb{R}^2 = (x_0, x_1)$ *düzleminde çizin. Tabii ki* Q *resimde görünmeyecek çünkü sonsuzda.*

Ders 2: $\mathbb{R}P^1$ ve $\mathbb{R}P^2$ - Reel izdüşümsel doğru ve düzlem

Geçen ders doğrusal cebir aracılığıyla izdüşümsel geometri için bir model kurduk. Şimdi bu modeli daha somut bir şekle sokalım, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ durumunda kurduğumuz geometrinin nasıl kolayca görselleşebildiğini fark edelim. İleriki derslerde kuracağımız kuramda bu dersteki somut modeli sık sık hatırlayacağız.

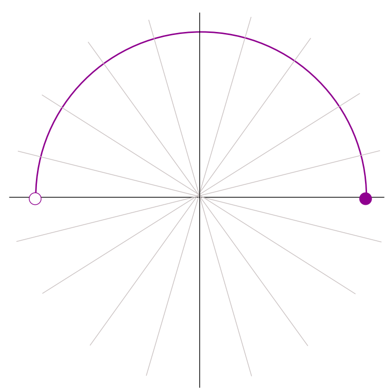
V vektör uzayının $\mathbb{F}^{n+1} = \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F}$ olduğu durumda $P(V)$ izdüşümsel uzayı yerine $\mathbb{F}P^n$ yazacağız. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ durumunda $P(\mathbb{R}^{n+1})$ uzayına *bölüm topolojisi* koyarak *reel izdüşümsel uzay* diyeceğiz ve bu uzayı $\mathbb{R}P^n$ olarak göstereceğiz. $\mathbb{R}P^2$ uzayına *reel izdüşümsel düzlem*, $\mathbb{R}P^1$ uzayına *reel izdüşümsel doğru* diyoruz. Benzer biçimde $\mathbb{C}P^n$ uzayına *karmaşık izdüşümsel uzay*, $\mathbb{C}P^2$ uzayına *karmaşık izdüşümsel düzlem*, $\mathbb{C}P^1$ uzayına *karmaşık izdüşümsel doğru* diyoruz.

Şimdi $\mathbb{R}P^1$ ve $\mathbb{R}P^2$ uzaylarını daha yakından tanıyalım.

2.1 $\mathbb{R}P^1$

$P(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}^2$'de orjinden geçen doğruların kümesi. Bu kümeyi Şekil 1'de gösterilen S kümesiyle birebir eşleyebiliriz: tamamla.

$$P(\mathbb{R}^2) \to S, \qquad [v] = [x : y : z] \mapsto$$



Şekil 1: $\mathbb{R}P^1$ bu renkli kümeyle birebir eşlenebilir.

Şimdi bundan daha fazlasını söyleyeceğiz. $P(\mathbb{R}^2)$'yi topolojik bir uzay olarak görüp onun tanıdık bir uzaya homeomorf olduğunu ispatlayacağız.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı,

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ bir } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ için } y = \lambda x$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}/_\sim$ olur. Bir $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ için v'nin denklik sınıfı tam da geçen ders tanımladığımız $[v] \in P(\mathbb{R}^2)$'dir.

$p : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \setminus \{\mathbf{0}\}/_\sim$ izdüşüm gönderimini bir bölüm gönderimi yapacak biçimde, $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}/_\sim$ kümesi üzerine bölüm topolojisi koyarak oluşturulan topolojik uzay $\mathbb{R}P^1$ olarak gösterilir. Tanım gereği, $\mathbb{R}P^1$'de U açık bir altküme demek, $\mathbb{R}^2$'de $p^{-1}(U)$ kümesi açık demektir.

İddiamız $\mathbb{R}P^1$ uzayının $\mathbb{R}^2$'deki birim çember S^1'e homeomorf olduğu. Bundan önce bölüm gönderimleri ve topolojisiyle ilgili birkaç topoloji teoremini hatırlayalım.

2.2 Bölüm uzayı

X ve Y topolojik uzaylar olsun. Örten bir $p : X \to Y$ gönderimi

$$\text{her } U \subset Y \text{ açık} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subset X \text{ açık}$$

koşulunu sağlarsa p'ye *bölüm gönderimi* denir. Bir bölüm gönderimi doğrudan doğruya sürekli olur.

A bir küme, $h : X \to A$ örten bir gönderim olsun. A üzerine h'yi bölüm gönderimi yapacak biçimde konan topolojiye *bölüm topolojisi* denir. Bu topolojide $h^{-1}(U)$ ters görüntüsü X'te açık olan her $U \subset A$ açık olacaktır.

Teorem 7. *X, Y, Z topolojik uzaylar, $p : X \to Y$ bir bölüm gönderimi, $g : X \to Z$ sürekli olsun. Eğer g gönderimi her bir $y \in Y$ için $p^{-1}(\{y\})$ ters görüntüsünde sabitse $f : Y \to Z$ ve $f \circ p = g$ olacak şekilde sürekli bir f vardır.*

Kanıt. f gönderimini her bir $y \in Y$ için şöyle tanımlayalım:

$$f(y) = g(p^{-1}(\{y\})).$$

Bu durumda her $x \in X$ için $(f \circ p)(x) = g(p^{-1}(\{p(x)\})) = g(x)$ olur. Öte yandan f süreklidir: her $U \subset Z$ açık için $(f \circ p)^{-1}(U) = g^{-1}(U)$ açıktır (g sürekli). $(f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U))$ kümesi açık ve p bölüm gönderimi olduğundan $f^{-1}(U)$ kümesi de açık olacaktır. Tam istediğimiz sonuç. □

Teorem 8. *X, Y, Z topolojik uzaylar, $p : X \to Y$ bir bölüm gönderimi, $g : X \to Z$ örten sürekli olsun. g'nin sabit olduğu eleman öbeklerinin kümesine X^* diyelim, yani:*

$$X^* = \{g^{-1}(z) | z \in Z\}.$$

$p : X \to X^*$ bariz izdüşüm gönderimi olsun. X^* üzerine bölüm topolojisi konmuş olsun. Bu durumda g gönderimi birebir örten sürekli bir $f : X^* \to Z$ gönderimi tarif eder. Üstelik g'nin bölüm gönderimi olmasıyla f'nin homeomorfi olması denk durumlardır.

Kanıt. Teorem 7 sürekli bir f gönderiminin var olduğunu söylüyor. Ayrıca f örten ve birebir. f homeomorfi ise bölüm gönderimidir. Dolayısıyla $g = f \circ p$ de bölüm gönderimidir. Tersten gidersek, g'nin bölüm gönderimi olduğu durumda, X^*'da açık bir U alalım. $f(U)$'nun da açık olduğunu göstereceğiz. $g^{-1}(f(U)) = p^{-1}(U)$ olduğundan ve p bölüm gönderimi olduğundan $g^{-1}(f(U))$ da açıktır. Ama g de bölüm gönderimi idi.; dolayısıyla $f(U)$'yu açık bulduk. □

Teorem 8'de X^* uzayı X'in bir bölümlenmesi ve her bir parçayı bir eleman kabul ediyor. Bu durumun yaygın bir örneği, X'in üzerinde bir denklik bağıntısı, ve X^*'ın denklik sınıflarının kümesi olduğu durum. Örneğin Teorem 8'nin hemen bir sonucunu yazabiliriz:

Sonuç 9. *$\mathbb{R}P^1$ uzayı S^1'e homeomorftur.*

Kanıt. S^1 üzerindeki her noktayı orjine göre simetriğiyle özdeşleştiren denklik bağıntısı $\asymp$ olsun. Teorem 8'i kullanmak için şu diyagrama bakalım:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{R}P^1 \arrow[r, "f"'] & S^1/\asymp
\end{tikzcd}$$

Burada g gönderimini şöyle tanımladık:

$$g : (x, y) \mapsto \left[\left(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{\asymp}.$$

g gönderimi örten ve aynı zamanda bölüm gönderimi. Böylece Teorem 8 bir f homeomorfisinin varlığını garanti ediyor. $S^1/\asymp$ uzayı S^1'e homeomorf olduğundan sonucu kanıtlamış oluyoruz. $\square$

Alıştırma 6. *Yukarıdaki g'nin bölüm günderimi olduğunu kanıtlayın.*

Alıştırma 7. *$S^1/\asymp$ uzayının S^1'e homeomorf olduğunu kanıtlayın. Bunu Teorem 8'i şık bir biçimde kullanarak yapabilir misiniz?*

2.3 $\mathbb{R}P^n$ bir manifolddur

Teorem 8'in kanıtındaki tartışma hemen üst boyutlara genelleştirilebilir:

Teorem 10. *S^n üzerindeki her noktayı orjine göre simetriğiyle özdeşleştiren denklik bağıntısı $\asymp$ olsun. $\mathbb{R}P^n$ uzayı $S^n/_{\asymp}$'e homeomorftur.*

Dolayısıyla, $\mathbb{R}P^2$ izdüşümsel düzlemi $S^3/_{\asymp}$ bölüm uzayına homeomorftur. Şimdi daha fazlasını kanıtlayacağız. Önce bir tanım:

Tanım 2.
- *X bir topolojik uzay olsun. X'in herhangi iki noktası x_1, x_2 için x_1'i içeren açık U_1 ve x_2'yi içeren açık U_2 kümeleri varsa ve bu kümeler birbirinden ayrık seçilebiliyorsa X uzayına* Hausdorff *denir.*
- *X Hausdorff bir uzay ve topolojisinin tabanı sayılabilir olsun. Eğer X'in her bir noktası, $\mathbb{R}^n$'de açık bir kümeye homeomorf bir açık kümenin içindeyse, X uzayına* (topolojik) manifold *denir. Bu durumda n'ye manifoldun* boyutu *denir.*

Teorem 11. *$\mathbb{R}P^n$ izdüşümsel uzayı n boyutlu bir manifolddur.*

Kanıt. $\mathbb{R}P^n$ Hausdorff'tur: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ olmak üzere $\mathbb{R}P^n$'de iki nokta $[\mathbf{x}]$ ve $[\mathbf{y}]$ olsun. S^n'de $[\mathbf{x}]$'i içeren açık bir küme U_x ve $[\mathbf{y}]$'yi içeren açık bir küme U_y olsun. U_x kümesi U_y ve $-U_y = \{-z | z \in U_y\}$ ile kesişmeyecek biçimde küçültülebilir. Böylece elde edilen $U_1 = U_x \cup -U_x$ ve $U_2 = U_y \cup -U_y$ kümeleri açıktır dolayısıyla $[U_x]$ ve $[U_y]$ kümeleri tanım gereği $\mathbb{R}P^n$'de açıktır, birbirlerinden ayrıktır ve sırasıyla $[\mathbf{x}]$ ve $[\mathbf{y}]$'yi içerirler.

$[\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$ olsun. Diyelim ki $x_0 \neq 0$ olsun. Sonsuzdaki izdüşümsel uzay

$$L_0 = \{[0 : a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{R}P^n\}$$

olmak üzere, $R = \mathbb{R}P^n \setminus L_0$ *yamasının* $\mathbb{R}^n$ ile birebir eşlendiğini biliyoruz. İddiamız R yamasının $\mathbb{R}P^n$'de açık ve $\mathbb{R}^n$'ye homeomorf olduğu.

$p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ bölüm gönderimini düşünelim. R'nin $\mathbb{R}P^n$'de açık olması $p^{-1}(R)$'nin S^n'de açık olması demek.

$$p^{-1}(R) = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in S^n, a_0 \neq 0\}$$

iki yarımkürenin birleşimi olduğundan ve her bir yarımküre S^n'de açık olduğundan iddiayı kanıtlamış oluyoruz. Üstelik her bir yarımküre hem R'ye hem de $\mathbb{R}^n$'ye homeomorf.

$$S_+ = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in S^n, a_0 > 0\}$$

yarımküresi R'ye p ile homeomorf çünkü $p|_{S_+}$ gönderimi hem birebir hem örten hem sürekli hem de tersi sürekli.

Kanıtı bitirmek için aşağıdaki alıştırmaları yapın. □

Alıştırma 8. *Yukarıdaki $p|_{S_+} : S_+ \to R$ gönderiminin tersinin de sürekli olduğunu gösterin.*

Alıştırma 9. *$\mathbb{R}^n$'de Öklit topolojisi için sayılabilir bir taban vardır, gösterin. Sonra $\mathbb{R}P^n$'nin topolojisine sayılabilir bir taban seçilebileceğini gösterin.*

Örnek. Yukarıdaki ispatı $\mathbb{R}P^2$ için incelemekte yarar var. Verilen herhangi bir $[a : b : c] \in \mathbb{R}P^2$ noktası için $a \neq 0$ ise noktayı Şekil 2(a)'daki $R_0 \subset \mathbb{R}P^2$ kümesinde, $b \neq 0$ ise Şekil 2(b)'deki R_1 kümesinde, $c \neq 0$ ise Şekil 2(c)'deki R_2 kümesinde görebiliriz. Her bir R_j $(j_0, 1, 2)$ $\mathbb{R}^2$'ye homeomorftur.

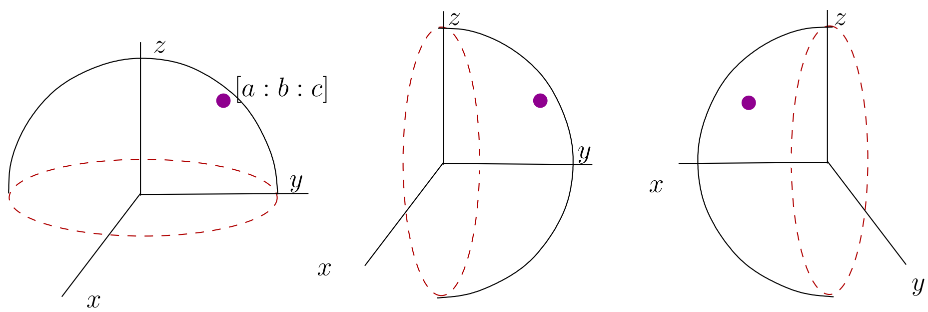
Bu dersi şu alıştırmayla bitirelim:

Alıştırma 10. *$\varphi : X \to Y$ iki topolojik uzay arasında bir gönderim, σ_Y Y'nin topolojisi için bir taban olsun. Diyelim ki φ'nin sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. Bunu göstermekle şunu göstermenin denk olduğunu kanıtlayın:*

$$\text{her bir } V \in \sigma_Y \text{ için } \varphi^{-1}(V) \text{ kümesi } X\text{'te açık.}$$

Alıştırma 11. *$\mathbb{C}P^1$ uzayının 2 boyutlu bir manifold olduğunu, $\mathbb{C}P^1$'in S^2'ye homeomorf olduğunu göstererek kanıtlayın. ($\mathbb{C}^2$'den S^2'ye, kompleks doğrularda sabit bir bölüm gönderimi yazın. Sonra Teorem 8'i kullanın.)*

Alıştırma 12. *$\mathbb{C}P^n$ uzayının $2n$ boyutlu bir manifold olduğunu kanıtlayın.*



Şekil 2: Aynı $[a:b:c]$ noktası için $\mathbb{R}P^2$'de üç ayrı yama

Sınav 1

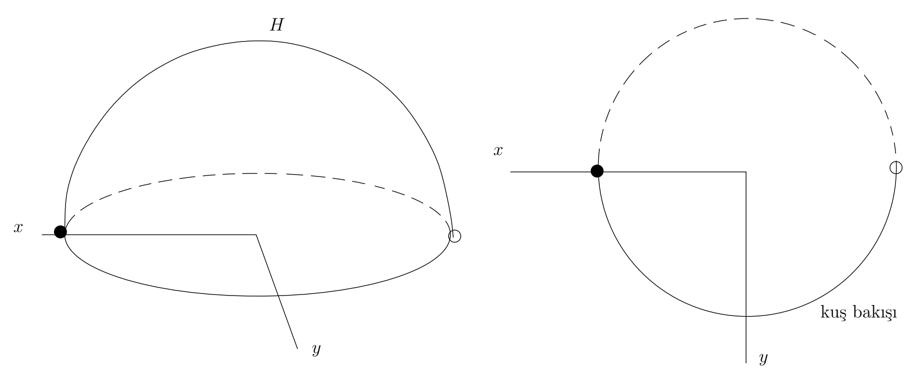
V uzayı $\mathbb{F}$ cismi üzerine $n+1$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. $P(V)$'de iki doğru birlikte bir düzlemin içinde yatıyorsa bu doğrulara *eşdüzlemsel* denir. Birkaç nokta aynı doğru üzerindeyse bu noktalara *eşdoğrusal* denir.

1. İki farklı doğrunun ortak bir noktası varsa bu iki doğru düzlemseldir. Gösterin.

2. $P(V)$'nin boyutu büyükeşit 2 olsun. $P(V)$'de öyle dört nokta vardır ki herhangi üçü eşdoğrusal değildir. Gösterin.

3. Şu kümeye bakalım: $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid y^2 = x^2+z^2\}$. $\mathbb{R}P^2$ izdüşümsel düzlemiyle aşağıdaki Şekil'de görülen ve birim küre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$'te yatan H kümesi arasında 1-1 örten aşikar bir eşleme olduğunu biliyoruz. H üzerinde C kümesini dikkatlice çizin ve önemli noktalarının yerini tam olarak belirleyin (*sonsuzdaki doğru* üzerindeki noktaları vs).

4. (a) $\mathbb{R}P^1$ izdüşümsel doğrusundan $(-1, 1]$ aralığına 1-1 örten bir h gönderimi yazın. Bu gönderim $\mathbb{R}P^1$'in noktalarını homojen koordinatlarda almalı ve bu koordinatlara bağlı olarak $(-1, 1]$'in bir noktasını vermeli.
   (b) Yukarıda tanımladığınız h'nin bir homeomorfi olmadığını gösterin. ($(-1, 1]$*'de akıllıca bir* U *açık kümesi seçin ve* $h^{-1}(U)$ *kümesinin* $\mathbb{R}P^1$*'de açık olmadığını gösterin. Nasıl?*)



Ders 3: İzdüşümsel dönüşümler

V ve W aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T : V \to W$ doğrusal bir dönüşüm olsun. Hangi durumlarda T dönüşümü $P(V)$'den $P(W)$'ya bir gönderim tanımlar? Bunun için tek sağlanması gereken koşul 1 boyutlu altuzayların 1 boyutlu altuzaylara gitmesi, yani T'nin çekirdeğinin $\mathbf{0}$ olması.

Tanım 3. *Çekirdeği* $\mathbf{0}$ *olmak üzere* $T : V \to W$ *doğrusal dönüşümü cinsinden*

$$\tau : P(V) \to P(W),\ [v] \mapsto [T(v)]$$

olarak tanımlanan τ *gönderimine* izdüşümsel dönüşüm *denir.*

Çekirdeği $\mathbf{0}$ olan T dönüşümü görüntüsü üzerine izomorfidir. Yalnızca 1 boyutlu altuzayları 1 boyutlu altuzaylara götürmekle kalmaz, k boyutlu altuzayları k boyutlu altuzaylara götürür. Dolayısıyla τ dönüşümü izdüşümsel doğruları izdüşümsel doğrulara, izdüşümsel düzlemleri izdüşümsel düzlemlere götürür.

Sav 12. *T ve $T' : V \to W$ aynı izdüşümsel dönüşümü tarif etmesi bir $\lambda \in \mathbb{F}$ için $T' = \lambda T$ olmasına denktir.*

Kanıt. T ve T''nün tarif ettiği dönüşümler τ ve τ' olsun. Eğer bir $v \in V$ için $\tau([v]) = \tau'([v])$ ise yani $[T(v)] = [T'(v)]$ ise v'ye bağlı bir $\lambda_v \in \mathbb{F}$ için $T(v) = \lambda_v T'(v)$ olmalı. Bu λ_v'nin v'den bağımsız olduğunu gösterirsek işimiz bitiyor.

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesi V için bir taban oluştursun. Her bir v_i $(i = 1, \ldots, n)$ için

$$T(v_i) = \lambda_i T'(v_i)$$

eşitliğini sağlayan $\lambda_i \in \mathbb{F}$ var. Bir $v = \sum_{i=1}^n v_i$ vektörü alalım.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_v T'(v_i) = \lambda_v T'(v) = T(v) = \sum_{i=1}^n T(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T'(v_i)$$

elde ederiz. $\{T'(v_i)\}_{i=1}^n$ kümesi $T'(V) \subset W$ uzayı için bir taban olduğundan, eşitliğin en sol ve en sağı her bir λ_i'nin birbirine ve λ_v'ye eşit olduğunu kanıtlar. Dolayısıyla λ_v v'den bağımsızdır. □

Sav 13. *$\tau : P(V) \to P(V)$ dönüşümü bir doğrunun üç farklı noktasını sabit bırakıyorsa, o doğrunun tüm noktalarını sabit bırakır.*

Kanıt. τ dönüşümünü tarif eden doğrusal izomorfi $T : V \to V$ olsun. $P(U)$ doğrusu üzerinde, τ dönüşümünün sabitlediği eşdoğrusal üç nokta $[v_i] \in P(V)$, $i = 1, 2, 3$ verilmiş. Bu durumda

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{F}$$

olmalı. U'nun boyutu 2 olduğundan, $v_3 = a_1v_1 + a_2v_2$ eşitliğini sağlayacak $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$ vardır. Öyleyse

$$\begin{aligned} \lambda_3 a_1 v_1 + \lambda_3 a_2 v_2 &= \lambda_3 v_3 \\ &= T(v_3) = T(a_1v_1 + a_2v_2) \\ &= a_1T(v_1) + a_2T(v_2) \\ &= \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2 \end{aligned}$$

olduğundan sol ve sağ taraflardan $\lambda_3 = \lambda_1$ ve $\lambda_3 = \lambda_2$ sonucu çıkar. Dolayısıyla herhangi $v \in P(U)$ için $v = b_1v_1 + b_2v_2$ eşitliğini sağlayan $b_1, b_2 \in \mathbb{F}$ alınırsa $\tau([v]) = [T(v)] = [\lambda_1 b_1 v_1 + \lambda_2 b_2 v_2] = [\lambda_1(b_1v_1 + b_2v_2)] = [v]$ olur. □

Alıştırma 13. *$P(V) = \{[x : y : z] | x, y, z \in \mathbb{F}\}$ düzleminde gelişigüzel bir l doğrusu alalım. $P(V)$'nin öyle bir dönüşümünü inşa edin ki l doğrusu $\{z = 0\}$ doğrusuna gitsin. Bunu gösterdiğinizde, artık düzlemde herhangi bir doğruyu sonsuzdaki doğru olarak alıp onun dışındaki noktaları bir yama olarak düşünmek konusunda endişe kalmayacak.*

Alıştırma 14. *V'nin bir izomorfisince tarif edilen izdüşümsel dönüşümün $P(V)$'nin bir homeomorfisi olduğunu gösterin.*

3.1 Möbius dönüşümleri

Alıştırma 11'da kompleks izdüşümsel doğru $\mathbb{C}P^1$'in S^2'ye homeomorf olduğunu görmüştük. $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{C}P^0$ ve $\mathbb{C}P^0$ bir tek nokta olduğuna göre buna inanmak kolay. Bu bölümde $\mathbb{C}P^1$'in $\mathbb{R}^2$'ye homoemorf o büyük parçasını $\mathbb{C}$ olarak ve tüm $\mathbb{C}P^1$'i *genişletilmiş* $\mathbb{C}$ olarak göreceğiz ve $\mathbb{C}$ üzerindeki Möbius dönüşümleriyle $\mathbb{C}P^1$ üzerindeki izdüşümsel dönüşümler arasında ilişki kuracağız.

$\mathbb{C}P^1$ üzerindeki izdüşümsel dönüşümler, bu dersin başında tanımladığımız üzere, $\mathbb{C}^2$'den kendisine kompleks doğrusal izomorfiler (özdönüşümler). Yani $\mathbb{C}^2$'nin özdönüşümlerini standart tabanında matris olarak ifade edersek, tüm özdönüşümler kümesini

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

diye yazabiliriz. Böylece herhangi bir $[x : y]$ noktasını bir $\mathbb{C}P^1$ dönüşümü $[ax + by : cx + dy]$ noktasına götürür.

Diyelim $y \neq 0$ olsun. Bu durumda $[z : 1] = [x/y : 1] = [x : y]$ noktası $[az + b : cz + d]$ noktasına gider. Yani dönüşüm $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}P^1$ üzerinde $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ olarak çalışır. Bu $\mathbb{C}$'de Möbius dönüşümünden başka bir şey değil. Eğer $cz + d \neq 0$ ise, yani $z = -d/c$ değilse her $z \in \mathbb{C}$, yine $\mathbb{C}$'de bir noktaya gider. Eğer $cz + d = 0$ ise, $c = 0$ olamayacağından $z = -d/c \in \mathbb{C}$ olur ve izdüşümsel dönüşüm $[z : 1]$ noktasını $[1 : 0]$ noktasına, yani sonsuzdaki noktaya götürür.

Dönüşüm sonsuzdaki nokta $[1 : 0]$'ı da $[a : c]$ noktasına götürür. $c = 0$ ise bu nokta $[1 : 0]$'dır; yani $c = 0$ durumunda sonsuz sonsuza, $\mathbb{C}$ kendisine gider. $c \neq 0$ ise $[1 : 0]$ noktası $[a/c : 1]$ noktasına gider.

3.2 Bir noktadan izdüşüm

$P(V)$ bir izdüşümsel düzlem, $P(U)$ ve $P(W)$ içinde iki doğru, $A \in P(V)$ ne $P(U)$'da ne $P(W)$'da yer almayan bir nokta olsun. $P(U)$'dan $P(W)$'ya şöyle bir gönderim tanımlayalım:

$$\pi_A : P(U) \to P(W),\ Q \mapsto AQ \cap P(W).$$

Burada AQ, A ve Q'dan geçen doğruyu anlatıyor.

Bu π_A bir izdüşümsel dönüşümdür. Bunu göstermek için π_A gönderiminin bir $T : U \to W$ doğrusal dönüşümünden geldiğini kanıtlamak gerek. Böyle bir T'yi U'nun taban vektörlerinde tanımlayacağız. $\{u_1, u_2\}$ kümesi U'nun bir tabanı ve $[a] = A$ olsun. $\{a, u_j\}$ vektörlerinin gerdiği altuzayla W'nun kesişimi 1 boyutludur ($j = 1, 2$). Bu kesişimi geren bir vektör w_j olsun. T dönüşümünü, taban vektörlerinde $T(u_j) = w_j$ olarak çalışan ve U'ya doğrusal olarak genişletilen dönüşüm olarak tanımlayalım.

Bu T aradığımız dönüşümdür. Önce, T'nin çekirdeği $\mathbf{0}$'dır çünkü $\{a, u_j\}$ vektörlerinin gerdiği düzlem W ile hep 1 boyutta kesişir. Ayrıca, inşa gereği $\pi_A([u]) = [T(u)]$'dur.

Böylece tarif ettiğimiz $\pi_A : P(U) \to P(W)$ dönüşümüne *$P(V)$'de A noktasından izdüşüm* ya da *A'dan perspektif* denir.

Alıştırma 15. *$\pi_A : P(U) \to P(W)$ dönüşümünün birebir örten olduğunu gösterin. Özel olarak, $\mathbb{R}P^2$ ya da $\mathbb{C}P^2$'de bir noktadan perspektifin iki doğru arasında bir homeomorfi olduğunu gösterin.*

3.3 İzdüşümsel geometrinin temel teoremi

Bir doğruyu kendisine götüren bir dönüşüm 3 noktayı sabitliyorsa doğrunun her noktasına sabitler (Sav 13). Şimdi daha fazlasını kanıtlayacağız. Bir izdüşümsel dönüşümün kaç noktadaki değerini biliyorsak dönüşümü tam olarak biliyoruz demektir? n boyutlu bir vektör uzayından kalkan bir doğrusal dönüşümün n tane doğrusal bağımsız vektör üzerindeki değeri biliniyorsa dönüşüm tam ve tek olarak biliniyor demektir. Temelde aynı olgu izdüşümsel dönüşümler için de geçerli. Önce doğrusal bağımsızlığın izdüşümsel geometrideki karşılığını tanımlayalım:

Tanım 4. *$P(V)$'nin boyutu n ve $[v_0], [v_1], \ldots, [v_{n+1}]$ $P(V)$'de verilmiş $n+2$ tane nokta olsun. Eğer bu noktaların her $n+1$ tanesini temsil eden $v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)} \in V$ vektörleri doğrusal bağımsızsa bu $n+2$ noktaya* genel konumda *denir.*

Teorem 14. (İzdüşümsel Geometrinin Temel Teoremi) *$P(V)$ ve $P(W)$'nun boyutu n olmak üzere $[v_0], [v_1], \ldots, [v_{n+1}]$ $P(V)$'de, $[w_0], [w_1], \ldots, [w_{n+1}]$ $P(W)$'da genel konumda noktalar olsun. Bu durumda*

$$V \to W,\ [v_i] \mapsto [w_i], (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

koşulunu sağlayan biricik izdüşümsel dönüşüm vardır.

Kanıt. $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ kümesi $P(V)$'nin bir tabanıdır. Genelliği bozmadan, $v_0 = v_1 + \ldots + v_{n+1}$ diye kabul edebiliriz. Benzer biçimde $w_0 = w_1 + \ldots + w_{n+1}$ olsun. $T : V \to W,\ v_i \mapsto w_i, (i = 1, \ldots, n+1)$ olarak tanımlanan doğrusal dönüşüm için $T(v_0) = w_0$ olur ve T dönüşümü teoremde istenen çeşit bir dönüşümü tarif eder.

Şimdi v_i ve w_i'lerin gerdiği doğrular üzerinde T gibi çalışan her dönüşümün aynı izdüşümsel dönüşümü anlattığını kanıtlamalıyız. Diyelim T' dönüşümü de teoremde istenen çeşit bir dönüşümü tarif etsin; yani $T'(v_i) = \lambda_i w_i,\ \lambda_i \in \mathbb{F},\ i = 0, \ldots, n+1$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_0 w_0 = T'(v_0) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{n+1} w_{n+1}$$

olduğundan

$$\lambda_0 w_0 = \lambda_0 w_1 + \ldots + \lambda_0 w_{n+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{n+1} w_{n+1}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1}$ olmalı. Böylece $T' = \lambda_0 T$ olur; yani T ve T''nün anlattığı izdüşümsel dönüşümler aynıdır (Sav 12). $\square$

Sav 13 bu büyük teoremin bir sonucu olarak görülebilir. Öncelikle, bir doğruda 3 nokta her zaman genel konumdadır. Teoreme göre, bir doğrunun $1 + 2 = 3$ noktasını sabitleyen bir dönüşüm tek olmalı. Dolayısıyla birim dönüşüm bunu yapan tek dönüşüm.

Alıştırma 16. *Bir doğrudan kendisine giden ve doğrunun iki noktasını sabitleyen bir dönüşüm bir tek olmak zorunda değil. Örnek verin.*

Alıştırma 17. *Benzer biçimde, n boyutlu $P(V)$'den $P(W)$'ya giden bir dönüşüm T olsun. Temsilcileri doğrusal bağımsız $n+1$ nokta verilsin. T'nin bu noktaları nereye götürdüğünü bilmek T'yi bilmeye yetmez. Gösterin.*

Ders 4: Desargues ve Pappus teoremleri

Bu derste geometrik yönü güçlü iki eski teoremi, Desargues[1] ve Pappus[2] teoremlerini kanıtlayacağız. Önce Desargues teoreminin iki kanıtını vereceğiz. Sonra Desargues teoreminin tersini ve Pappus teoremini kanıtlayacağız.

4.1 Desargues'ın teoremi

Aynı noktadan geçen doğrulara *eşnoktasal* denir.

Teorem 15. (Desargues'ın Teoremi) *ABC ve $A'B'C'$ düzlemde iki üçgen olsun. AA', BB' ve CC' doğruları eşnoktasal ise $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ ve $R = BC \cap B'C'$ noktaları eşdoğrusaldır.*

Bu teoremin iki kanıtı aşağıda. Bunlardan ilki doğrusal cebir kullanıyor.

Kanıt. Büyük harfler izdüşümsel düzlemde ($P(U)$) noktaları, küçük harfler bu noktaları anlatan (U'da) vektör temsilcilerini göstersin. AA', BB' ve CC' doğrularının ortak noktası X olsun. x vektörü, a ve a''nün ya da b ve b''nün ya da c ve c''nün doğrusal birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumda temsilcileri öyle seçelim ki

$$x = a + a' = b + b' = c + c'$$

eşitlikleri sağlansın. Temsilcileri Teorem 14'ün kanıtına başlarken de böyle seçmiştik.

Şimdi P için temsilci bir vektör bulalım. Hem düzlem(a, b)'de hem düzlem(a', b')'de bir vektör bulmalıyız. $a + a' = b + b'$ olduğundan $a - b = b' - a'$ eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sol tarafı düzlem(a, b)'de sağ tarafı düzlem(a', b')'de. Öyleyse p'yi bu vektörler olarak seçebiliriz. Benzer biçimde

$$q = a - c = c' - a', \; r = b - c = c' - b'$$

olsun. $p - q + r = (a - b) - (a - c) + (b - c) = \mathbf{0}$ olduğundan p, q, r doğrusal bağımlı, farklı üç vektördür; yani bu vektörler eşdüzlemseldir; yani P, Q ve R noktaları eşdoğrusaldır. □

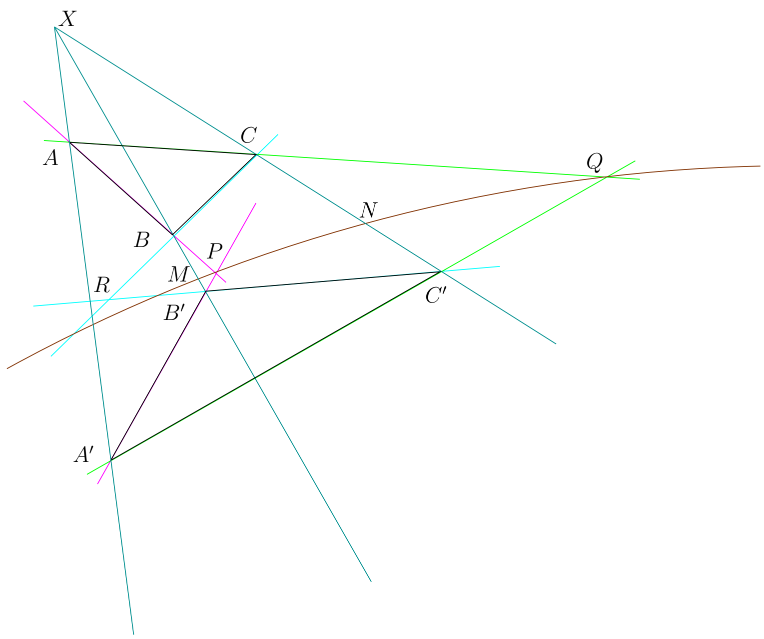
Vereceğimiz ikinci kanıt doğrusal cebir alemine inmeden, şu ana kadar kanıtladığımız savlar ve teoremleri kullanacak. Kanıtın kalbi, İzdüşümsel Geometrinin Temel Teoremi. Önce Desargues Teoremini başka terimlerle yeniden yazalım.

Tanım 5. *Düzlemde iki şekilden birincisinden alınan noktalar ve ikincisinden alınan karşılık gelen noktaların anlattığı doğrular bir X noktasında kesişiyorlarsa, bu şekillere X'e göre* perspektif *denir.*

Benzer biçimde birinci şekilden alınan doğrularla ikinci şekilde karşılık gelen doğrular hep aynı l doğrusu üzerinde kesişiyorsa bu şekillere l'ye göre perspektif *denir.*

Desargues'ın Teoremi yeniden. *Düzlemde iki üçgen bir noktaya göre perspektifse bir doğruya göre de perspektiftir.*

[1] Gérard Desargues, 1591-1661
[2] İskenderiyeli Pappus, 290- 350



Şekil 3:

Kanıt. ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri X notasına göre perspektif olsun. PQ doğrusunun AA' , BB' ve CC' doğrularını kestiği noktalar sırasıyla K, M ve N olsun. Şekil 3'te öyle çizilmemiş olsa da R noktasının PQ doğrusu üzerinde olduğunu göstereceğiz ve böylece iki üçgen PQ doğrusuna göre perspektif olmuş olacak. P, Q ve R noktalarına göre şu perspektif gönderimlerini tanımlayalım:

$$\pi_P : BB' \to AA',\ \pi_Q : AA' \to CC',\ \pi_R : BB' \to CC'.$$

Bu perspektifler noktalar üzerinde şöyle çalışıyor:

$$\begin{array}{rcl} \pi_P : X & \mapsto & X \\ B & \mapsto & A \\ B' & \mapsto & A' \\ M & \mapsto & K \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \pi_Q : X & \mapsto & X \\ A & \mapsto & C \\ A' & \mapsto & C' \\ K & \mapsto & N \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \pi_Q \circ \pi_P : X & \mapsto & X \\ B & \mapsto & C \\ B' & \mapsto & C' \\ M & \mapsto & N \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \pi_R : X & \mapsto & X \\ B & \mapsto & C \\ B' & \mapsto & C' \\ M & \mapsto & ? \end{array}$$

Teorem 14'e göre $\pi_Q \circ \pi_P$ ve π_R aynı dönüşüm olmalı. Dolayısıyla $\pi_R(M) = N$ olmalı; yani R, M, N noktaları eşdoğrusal imiş. MN doğrusu P ve Q'yu içerdiğine göre P, Q, R noktaları da eşdoğrusal olmalı. □

Bu kanıta dikkat: doğrusal cebir modeli üzerine oturduğumuzu açıkça kullanmadan daha önce kanıtlanmış gerçekleri kullanarak ilerledi. Bu durum bize şu hissi veriyor. Kullandığımız kanıtlanmış gerçeklerden bazılarını belit olarak kabul edip izdüşümsel geometriyi bir belitler sistemi olarak kurabiliriz. Desargues'ın teoremini bu sistemin içinde kanıtlayabiliriz. İzdüşümsel geometriyi bir belitler sistemi olarak kurma konusunu ileride konuşacağız.

Desargues'ın teoreminin tersi de doğru:

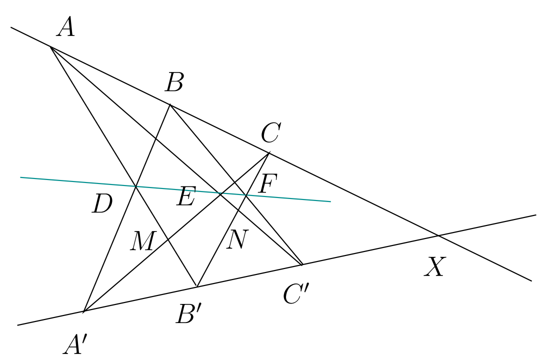
Alıştırma 18. *Düzlemde iki üçgen bir doğruya göre perspektifse bir noktaya göre de perspektiftir. Yukarıdaki gibi iki ayrı yöntemle gösterin.*

4.2 Pappus'un teoremi

Teorem 16. (Pappus'un Teoremi) *A, B, C eşdoğrusal ve A', B', C' eşdoğrusal altı farklı nokta olsun. O zaman $D = AB' \cap A'B$, $E = AC' \cap A'C$ ve $F = BC' \cap B'C$ noktaları da eşdoğrusaldır.*

Bu teoremin daha önce olduğu gibi iki çeşit kanıtı yapılabilir. Doğrusal cebirle kanıtı alıştırma olarak bırakıyoruz. Bunun yerine doğrusal cebir modelini kullanmayan bir kanıt yapalım.

Kanıt. A, B, C noktalarının üstünde bulunduğu α doğrusuyla A', B', C' noktalarının üstünde bulunduğu α' doğrusu X noktasında kesişsinler. Eğer bu 6 noktadan biri X ise teoremin sonucunda sözü geçen 3 noktadan ikisi X olacak ve gösterecek bir şey kalmayacak. Dolayısıyla bu 6 noktadan hiçbiri X olmasın diye kabul edelim.



Şekil 4:

Şu doğrular arasında perspektifleri görelim:

$$ADMB' \overset{\pi_{A'}}{\to} ABCX \overset{\pi_{C'}}{\to} NFCB'.$$

Öte yandan

$$AMB' \overset{\pi_E}{\to} NCB'$$

olduğunu da görüyoruz. Dolayısıyla yine Teorem 14 sayesinde $\pi_E = \pi_{C'} \circ \pi_{A'}$ olmalı ve bu yüzden $\pi_E(D) = F$ elde ediyoruz; yani E, D, F noktaları eşdoğrusal imiş. $\square$

Ders 5: İzdüşümsel geometride eşleklik

Bu derste izdüşümsel geometride her kavrama karşılık gelen bir kavram olduğunu ve bu eşleklik (*duality*) sayesinde her önermenin bir kardeş önermesi olduğunu göreceğiz.

5.1 Eşlek vektör uzayı

Birkaç doğrusal cebir kavramını anımsayalım.

V'den $\mathbb{F}$'ye, $\mathbb{F}$'ye göre doğrusal tüm gönderimlerin kümesini V^* olarak gösterelim. $f, g \in V^*$ olmak üzere $f + g$'yi $u \in V$'de $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ olarak tanımlarsak $(V^*, +)$ değişmeli bir grup olur. $c \in \mathbb{F}$ olmak üzere $(cf)(u) = cf(u)$ olarak tanımlanan skaler çarpmayla birlikte V^* kümesi $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya *V'nin eşlek (dual) uzayı* denir. $P(V^*)$ uzayına da *eşlek izdüşümsel uzay* diyeceğiz.

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ V'nin bir tabanı ve $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ olsun.

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

ise $\{f_1, \ldots, f_n\}$ kümesine *eşlek taban* denir.

Alıştırma 19. *Yukarıdaki koşulu sağlayan $\{f_1, \ldots, f_n\}$ kümesinin V^*'ın gerçekten bir tabanı olduğunu kanıtlayın.*

Böylece V^*'ın boyutu V'nin boyutuna eşit olur.

Öte yandan, iki vektör uzayı arasında her doğrusal dönüşüm, eşlek uzayları arasında bir doğrusal dönüşümü doğallıkla tarif eder. $T : V \to W$ olsun. $T^* : W^* \to V^*$ dönüşümünü herhangi bir $f \in W^*$ için ve herhangi $v \in V$ üstünde şöyle tanımlayalım:

$$T^*(f)(v) \doteq f(T(v)).$$

Alıştırma 20. *Yukarıdaki gibi tanımlanan T^* gönderiminin gerçekten de doğrusal olduğunu gösterin.*

Öyleyse, her $T : V \to W$ dönüşümü bir $\tau : P(V) \to P(W)$ izdüşümsel dönüşümü tanımladığı gibi, T^* aracılığıyla bir de $\tau^* : P(W^*) \to P(V^*)$ dönüşümü tanımlıyor.

V^* bir vektör uzayı olduğuna göre onun da eşlek uzayı $(V^*)^*$'dan söz edebiliriz. V^{**} olarak göstereceğimiz bu uzay bir vektör uzayı olacak ve boyutu V'ninkine eşit olduğundan V'ye izomorf olacak tabii ki. Şimdi bu iki uzay arasında doğal bir izomorfinin var olduğunu göstereceğiz.

Teorem 17. *$S : V \to V^{**}$, $v \mapsto S(v)$ gönderimi, her bir $f \in V^*$ için $S(v)(f) \doteq f(v)$ olarak tanımlansın. Bu S bir vektör uzayı izomorfisidir.*

Kanıt. S doğrusal, görmek kolay:

$$\begin{aligned} S(av + bu)(f) &= f(av + bu) = af(v) + bf(u) \\ &= aS(v)(f) + bS(u)(f) = (aS(v) + bS(u))(f). \end{aligned}$$

S'nin birebir olduğunu da şöyle görelim:

$$\begin{aligned} S(v) = S(u) &\Leftrightarrow \text{ her } f \in V^* \text{ için } S(v)(f) = S(u)(f) \\ &\Leftrightarrow \text{ her } f \in V^* \text{ için } f(v) = f(u) \\ &\Leftrightarrow \text{ her } f \in V^* \text{ için } f(v-u) = 0 \\ &\Leftrightarrow v = u. \end{aligned}$$

□

Dolayısıyla S dönüşümü, $P(V)$'den $P(V^{**})$'a bir izdüşümsel dönüşüm tanımlıyor.

5.2 İzdüşümsel eşleklik

$P(V)$ izdüşümsel uzayında (ya da V vektör uzayında), uzayın boyutundan bir düşük boyutlu izdüşümsel (doğrusal) bir altuzaya *hiperdüzlem* denir.

Teorem 18. (İzdüşümsel eşleklik) *$P(V)$ uzayındaki hiperdüzlemlerle $P(V^*)$ uzayındaki noktalar arasında birebir eşleme vardır.*

Kanıt. Kanıtta tabii ki bu eşlemeyi inşa edeceğiz. $P(V)$'nin boyutu n olsun. $F \in P(V^*)$ ve bir temsilcisi $f \in V^*$ olsun. f her şeyi sıfıra götüren dönüşüm olamayacağından f örten olmalı; yani f'nin görüntü uzayı 1 boyutlu. Öyleyse f'nin çekirdeği $n-1$ boyutlu bir altuzay, yani V'de bir hiperdüzlem. Bu hiperdüzlemi U_f olarak gösterelim ve şu gönderimi tanımlayalım:

$$\psi : P(V^*) \to \{P(V)\text{'deki hiperdüzlemler}\},\ F \mapsto P(U_f).$$

Öncelikle, ψ iyi tanımlı, yani seçilen temsilci f'den bağımsız çünkü f yerine λf seçilse bile ($\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$), çekirdek değişmeyecek; yani $U_{\lambda f} = U_f$.

İkincisi, ψ örten: $P(V)$'de verilen her $P(U)$ hiperdüzlemi için bunu çekirdek kabul eden bir $f \in V^*$ gönderimi inşa edelim. U için seçilmiş herhangi $\{u_i\}_{i=1}^n$ tabanına bir $v \in V$ vektörü ekleyerek V'ye bir taban bulunabilir. Eşlek taban $\{f_1, \dots f_n, f\}$ olsun. v'ye karşılık gelen $f : V \to \mathbb{F}$ dönüşümü tanım gereği $f(u_i) = 0, f(v) = 1$ eşitliklerini sağlar; yani f'nin çekirdeği verilen U olur.

Son olarak, ψ birebir: $\psi([f]) = \psi([g])$ olsun. O zaman çekirdekleri aynı, yani $U = U_f = U_g$. Demin inşa ettiğimiz eşlek tabanı kullanalım. Uygun seçilmiş $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{F}$ için

$$g = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n + \lambda f$$

olmalı. Her $u \in U$ için $g(u) = 0$ olduğundan her i için $\lambda_i = 0$ buluruz. Dolayısıyla $g = \lambda f$ ve $[g] = [f]$ olur. □

V^{**} da V^*'ın eşlek uzayı olduğundan $P(V^*)$'deki hiperdüzlemlerle $P(V^{**})$ uzayındaki noktalar arasında da doğal bir birebir eşleme var ama $P(V^{**})$ uzayı S aracılığıyla $P(V)$'ye izomorf olduğundan $P(V)$'deki hiperdüzlemlerle $P(V)$'nin noktaları birebir eşlenebilir.

Hemen şunu görelim:

Sonuç 19. *Eğer $P(V)$'de bir nokta bir hiperdüzlemin üstündeyse $P(V^*)$'da karşılık gelen hiperdüzlem karşılık gelen noktayı içerir.*

Öyleyse eşleklik sayesinde bir çeviri listesi yapabiliriz. Örneğin bir izdüşümsel düzlem ve eşlek uzayı arasında şöyle bir *eşleklik sözlüğü* olacak:

1)	nokta	doğru
2)	doğru	nokta
3)	nokta doğrunun üzerinde	doğru noktayı içeriyor
4)	iki nokta bir doğrunun üzerinde	iki doğru bir noktayı içeriyor, yani o noktada kesişiyor
5)	birkaç nokta eşdoğrusal	birkaç doğru eşnoktasal
6)	bir noktadan geçen tüm doğrular (*deste*)	bir doğrunun içerdiği tüm noktalar (*içerik*)
7)	iki doğrunun içerikleri arasında bir noktadan perspektif	iki noktanın desteleri arasında bir doğrudan perspektif

Aslında bu sözlükte iki küçük iddia var. Önce 3. satırdaki eşleşmeyi açıkça yazalım:

Alıştırma 21. *$\psi : P(V^*) \to P(V)$ dönüşümü Teorem 18'deki gibi olsun; $\psi^* : P(V^{**}) \to P(V^*)$ de $P(V^{**})$ uzayının noktalarını $P(V^*)$ uzayının hiperdüzlemleriyle eşleyen benzer dönüşüm; S dönüşümü de Teorem 17'deki gibi olsun. $P(V)$ düzleminde bir L doğrusu üzerinde bir x noktası alalım. Bu durumda $P(V^*)$ uzayında $\psi^{-1}(L)$ noktası $\psi^*(S(x))$ doğrusu üzerindedir, kanıtlayın.*

Sözlükte 7. satıra da açıklık getirelim. İki doğrunun içerikleri arasında bir E noktasından perspektifi şöyle kuruyoruz. α doğrusundan alınan bir G noktası β doğrusundaki $EG \cap \beta$ noktasına gider. Bunun eşlek reçetesi şöyle olmalı: ϵ bir doğru olmak üzere, A noktasını içeren bir γ doğrusu B noktasını içeren $(\epsilon \cap \gamma)B$ doğrusuna gider. Bu gönderime ϵ doğrusundan perspektif demiştik (Tanım 5).

Artık bu sözlük sayesinde şimdiye kadar yazdığımız ve kanıtladığımız önermelere eşlek önermeler yazabiliriz.

- Düzlemde Sav 1'in eşlek önermesi kendisi.
- Düzlemde Sav 2'nin eşlek önermesi: *Bir noktadan en az 3 doğru geçer.*

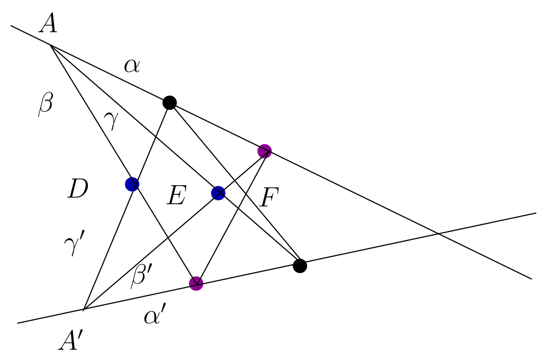
  Alıştırma 22. *Sav 2'nin eşlek önermesini kanıtlayın.*

- Sav 3 ve Sav 4 birbirine eşlek önermeler.
- Desargues'ın Teoremi ile tersi önerme, yani Alıştırma 18'deki önerme birbirlerine eşlek önermeler. Bu yüzden birini kanıtlamak yeterli. O kanıtı uygun bir biçimde eşleklik sözlüğünden geçirerek diğer sav için bir kanıt üretebilirsiniz.

  Alıştırma 23. *Desargues'ın Teoremi için yaptığımız ikinci kanıtı uygun bir çeviriyle tersi için bir kanıta dönüştürün.*

- Pappus'un Teoreminin eşlek önermesini yazalım: α, β, γ *eşnoktasal ve* α', β', γ' *eşnoktasal altı farklı doğru olsun. O zaman* $D = (\alpha \cap \beta')(\alpha' \cap \beta)$, $E = (\alpha \cap \gamma')(\alpha' \cap \gamma)$ *ve* $F = (\beta \cap \gamma')(\beta' \cap \gamma)$ *doğruları da eşnoktasaldır.*

  Eşnoktasal olduğu iddia edilen doğrular, Şekil 5'deki aynı renkli nokta çiftlerini birleştiren doğrular. Bunların eşnoktasal olması demek, DE doğrusunun F'den geçmesi demek ki bu da tam Pappus'un Teoreminin iddiası. Dolayısıyla Pappus'un eşlek önermesi kendisi.



Şekil 5:

- Şimdi hiç de bariz olmayan bir sonuca, Sav 13'ün eşlek önermesine bakalım: *$P(V)$ düzleminde τ dönüşümü bir noktadan geçen üç farklı doğruyu sabit bırakıyorsa, o noktanın tüm destesini sabit bırakır.* Burada sabit bırakmak derken nesne olarak sabit bırakmak kastediliyor. Bir doğruyu sabit bırakan, her noktasını sabit bırakmak zorunda değil.

  Alıştırma 24. *Sav 13'ün eşlek önermesini kanıtlayın.*

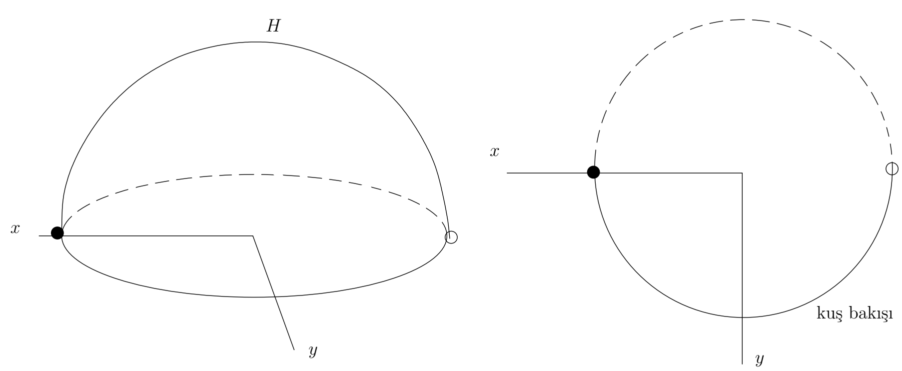
Sınav 2

1. Desargues'ın Teoreminin eşlek ifadesini yazın ve doğrusal cebir yöntemleriyle kanıtlayın.

2. (a) α ve β, bir izdüşümsel düzlemde X noktasında kesişen iki doğru ve $\tau : \alpha \to \beta$ bir izdüşümsel dönüşüm olsun. τ dönüşümünün bir noktadan perspektif olması için gerek ve yeter koşulun $\tau(X) = X$ olduğunu kanıtlayın.
   (b) Önceki şıktan düzlemde iki doğru arasındaki her dönüşümün bir perspektif olmak zorunda olmadığını öğrendik. Şimdi $\mathbb{R}P^2$'de $K = \{[0 : y : z]\}$ doğrusundan $L = \{[x : 0 : z]\}$ doğrusuna öyle bir dönüşüm yazın ki bir perspektif olmasın.

3. (a) Düzlemde bir A noktası ve A'yı içermeyen bir l doğrusu olsun. l doğrusunun noktalarıyla A'dan geçen doğruların birebir eşlenebileceğini gösterin.
   (b) Bu eşlemeyi $A = [1 : 0 : 0]$ ve $l = \{[x : y : z] | x + y + z = 0\}$ için açıkça yazın.

4. K, L, M, N **Öklit düzleminde** dört ayrı nokta olsun. κ ve λ doğruları, sırasıyla K ve L'den geçip MN doğrusuna paralel olsun. μ ve ν doğruları, sırasıyla M ve N'den geçip KL doğrusuna paralel olsun. Şu üç noktanın eşdoğrusal olduğunu gösterin: $A = \kappa \cap \mu$, $B = \lambda \cap \nu$, $C = KN \cap ML$ (şekle bakın).



5. $\mathbb{F} = Z_2$ üstünde V üç boyutlu bir vektör uzayı olsun. (a) $P(V)$'de kaç nokta var?
   (b) $P(V)$'de kaç doğru var?

Ders 6: Belitlerle inşa ve sonlu geometriler

Bu derste şimdiye kadar üstünde durmadığımız ama mutlaka tartışılması gereken iki konu üstünde duracağız. Öncelikle bir an için doğrusal cebirle izdüşümsel geometri inşasını bir kenara bırakıp, benzer bir geometrinin belitlerle nasıl kurulabileceğini konuşacağız. Daha sonra sonlu bir cisim üstünde izdüşümsel geometrinin neye benzediğini anlamaya çalışacağız. Bir doğrusal cebir modeline atıfta bulunmadan bir geometri kurarak bunun izdüşümsel geometri belitlerini sağladığını göreceğiz. Bu konulara ileriki derslerde atıfta bulunmayacağız.

6.1 Geometrinin belitlerle inşası

Bu derse kadar üstünde düşündüğümüz izdüşümsel geometri, doğrusal cebirle kurulmuş modellerdi ve bu nedenle en temelden başlayarak her savı kanıtlayabiliyorduk. Oysa bu en temel savları belit kabul ederek daha sonraki kimi teoremleri hala kanıtlayabiliriz. Bu belitler seçimini de tutarlı ve birbirinden bağımsız bir biçimde yapabiliriz. Burada yalnızca izdüşümsel düzlemi tartışalım. Belitleri seçmenin ve sıralamanın türlü yolları var. Biz burada Hartshorne'u izliyoruz [**?**]. Daha ayrıntılı bir tartışma için bu kitaba bakılmalı.

İzdüşümsel düzlem, elemanlarına *nokta* denen ve *doğru* adında altkümeleri olan bir kümedir; şu belitleri sağlar:

Belit 1. Bir doğru ve dışında bir nokta vardır (Sav 1).

Belit 2. Her doğruda en az üç nokta vardır (Sav 2).

Belit 3. İki ayrı nokta bir ve yalnız bir doğru tarafından içerilir (Sav 3).

Belit 4. İki ayrı doğrunun bir ve yalnız bir ortak noktası vardır (Sav 4).

Bu dört beliti sağlayan bir kümede Desargues'ın ya da Pappus'un Teoremi doğru olmak zorunda değil. Nitekim, Belit 1-4'ün doğru olduğu ama Desargues'ın Teoreminin olmadığı geometriler var ([**?**]). Dolayısıyla Desargues'ın Teoremi ya da Pappus'un Teoremi istenirse, bunları bir belit olarak eklemek gerekiyor.

Belit 5. Desargues'ın Teoremi (Teorem 15).

Belit 6. Pappus'un Teoremi (Teorem 16).

Belit 5'in var olduğu bir düzleme *Desargues düzlemi*, Belit 6'nın var olduğu bir düzleme *Pappus düzlemi* deniyor.

Alıştırma 25. *Bu altı belitin İzdüşümsel Geometrinin Temel Teoremini (Teorem 14) gerektirdiğini kanıtlayın.*

Öte yandan, Temel Teoremi bir belit olarak kabul edersek (Belit TT diyelim), Belit 1-4 ve Belit TT, Pappus Teoremini gerektiriyor. Pappus Teoremini kanıtlarken tam da bunu yapmıştık; doğrusal cebir değil, daha önce kanıtladığımız paketçikleri kullanmıştık.

Bir de eşleklik var. Eşlek uzayı, yukarıdaki gibi tanımlanan bir P izdüşümsel düzleminin doğrularını nokta kabul eden, P'nin bir noktasındaki doğru destesini de bir doğru kabul eden bir küme olarak tanımlayalım ve P^* diye gösterelim

Alıştırma 26. *P^*'ın da Belit 1-4'ü sağladığını ve böylece bir izdüşümsel düzlem olduğunu gösterin.*

Ayrıca gösterilebilir ki P Desargues düzlemi (ya da Pappus düzlemi) ise P^* da öyledir. Geometride eşleklik kavramının var olabilmesi için, geometriye katılan her yeni belitin eşlek düzlem tarafından da sağlanması gerek. Örneğin Belit 1-6 ile kurulan bir düzlemde eşleklik ilkesinin çalışacaktır.

Bir düzlem modeli kurulduğunda, bunun nasıl bir izdüşümsel düzlem olduğunu anlamak için yukarıdaki belitlerden hangilerini sağladığı denetlenmeli. Örneğin bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde üç boyutlu bir V vektör uzayı aracılığıyla kurulan $P(V)$ düzleminin yukarıdaki tüm belitleri sağladığını ilk beş derste kanıtladık. Şimdi $\mathbb{F}$'nin çarpmaya göre değişmeli olmasından vazgeçelim; $\mathbb{F}$'yi bir bölüm halkası olarak alalım. Bu durumda $P(V)$ kümesinin bir Desargues düzlemi olduğu, yani Belit 1-5'i sağladığı gösterilebilir. Hatta $P(V)$'nin Pappus olması için gerek ve yeter koşulun da $\mathbb{F}$'nin bir cisim olması olduğu kanıtlanabilir [**?**].

6.2 Sonlu geometriler

Şimdiye kadar yaptığımız ve ilerki derslerde yapacaklarımızın çoğu sonlu ya da sonsuz, herhangi bir $\mathbb{F}$ cismi üzerine doğrusal cebir aracılığıyla kurulmuş geometriler için geçerli. Yine de, şu ana kadar sonlu bir $\mathbb{F}$ için inşa edilmiş bir geometriyi açık açık görmedik. Bu dersin kalan bölümünde bunu yapacağız. $\mathbb{F}$ sonlu bir cisim olsun. Cebirden biliyoruz ki $\mathbb{F}$'nin eleman sayısı bir asal sayının bir üssünden başka bir şey olamaz.

Sonlu bir $\mathbb{F}$ üzerine kurulmuş sonlu boyutlu bir geometride tabii ki herhangi bir doğrunun üstünde sonlu sayıda nokta olacak. İki doğru, dışlarındaki bir noktadan her zaman perspektif olduğuna ve bu gönderim birebir örten olduğuna göre (Alıştırma 15), sonlu bir geometride doğruların üzerindeki nokta sayıları sabit olmalı. Bu sabit sayı, $q \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $q+1$ olsun. Boyut 1'den büyükse, q en az 2 olmalı (Sav 2). $n > 1$ boyutlu ve herbir doğrusunda $q+1 > 2$ noktası olan sonlu bir geometriyi $PG(n, q)$ olarak göstereceğiz. $PG(n, q)$ doğrusal cebirden gelen bir modele sahip olmayabilir. Yine de, bir önceki bölümdeki belitleri sağlamak zorunda. Örneğin $PG(2, q)$'da her doğru $q+1$ nokta içerdiğine göre, eşleklik beliti sayesinde her noktanın doğru destesinde $q+1$ doğru vardır diyebiliriz.

düzlemde böyle, genelde bir dizi perspektif.

Şimdi birkaç örnek inşa edelim.

Örnek 1. $PG(2, 2)$: Bu geometri, $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ vektör uzayının izdüşümsel uzayı $P(V)$'den başka bir şey değil. V'de 8 nokta var. Bu noktalardan $(0, 0, 0)$ hariç diğer hepsi $P(V)$'nin birer noktasını belirtiyor, yani $PG(2, 2)$'de 7 nokta var. Herhangi bir doğruyu $\{ax+by+cz = 0\}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ biçiminde anlattığımıza göre, $PG(2, 2)$'de toplam 7 doğru var. Herbir noktadan da tam tamına 3 farklı doğru geçiyor. Örneğin, $[0 : 0 : 1]$ noktasından $\{x + y = 0\}$, $\{x = 0\}$ ve $\{y = 0\}$ doğruları geçiyor. $\{x + y = 0\}$ doğrusu üzerindeki noktalarsa $[1 : 1 : 0]$, $[1 : 1 : 1]$ ve $[0 : 0 : 1]$.

Alıştırma 27. *$PG(2, 2)$'deki tüm doğruları ve üstlerinde bulunan noktaları listeleyin.*

$PG(n, q)$'nun nokta sayısını hesaplayabiliriz. Öncelikle, bir $P \in PG(2, q)$ noktasından $q + 1$ ayrı doğru geçiyor. Herbir doğrunun P'den başka q tane noktası var. Dolayısıyla $PG(2,q)$'da toplam nokta sayısı $q(q+1)+1=q^2+q+1$ olmalı. Benzer biçimde $PG(3,q)$'da bir doğrudan $q+1$ tane ayrı düzlem geçer (neden?). Dolayısıyla $PG(3,q)$'da toplam nokta sayısı $q^2(q+1)+q+1=q^3+q^2+q+1$ olmalı. Genel durumu size bırakalım:

Alıştırma 28. *$PG(n,q)$'da toplam nokta sayısının $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ olduğunu tümevarımla gösterin.*

Örnek 2. $PG(2,5)$: Bu geometride toplam 31 nokta olacak. Noktaları P_i ve doğruları l_j, $0 \leq i,j \leq 30$ olarak gösterelim. Noktalarla doğrular arasındaki ilişkiyi şöyle tanımlıyoruz: P_r noktası l_s doğrusunun üstünde olması için gerek ve yeter koşul $r+s$ toplamının mod 31'de $\sigma = \{0,1,3,8,12,18\}$ kümesinin bir elemanına denk olması. Böylece her doğruda tam 6 nokta olmasını garanti ettik.

Böyle tanımlanan $PG(2,5)$ geometrisinin belitleri sağladığını göstermeliyiz. Örneğin, Belit 3'ü kanıtlayalım: iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer. P_r ve P_t iki ayrı nokta olsun. l_s doğrusunun iki noktadan da geçmesi için $r+s, t+s \in \sigma$ olmalı, yani $r-t$'nin σ'nın iki elemanının farkı biçiminde yazmalıyız. Örneğin $r=2$ ve $t=1$ ise $r-t=1$ sayısını farkları olarak verecek iki σ elemanı 1 ve 0. Farkları 1 olan başka bir çift de yok. Dolayısıyla bu örnekte doğru l_{30} imiş. Şimdi savımız şu:

Alıştırma 29. *Herhangi r ve t için, $r-t$ farkını farkları kabul eden bir ve yalnız bir σ eleman çifti vardır. Gösterin.*

Diğer belitlerin de sağlandığının kanıtı gerekiyor.

Alıştırma 30. *Yukarıda kurulan $PG(2,5)$'in Belit 1,2 ve 4'ü sağladığını gösterin.*

Alıştırma 31. *Yukarıda kurulan $PG(2,5)$'in bir Desargues düzlemi olduğunu gösterin.*

Görüldüğü gibi, böyle inşa edilen $PG(2,5)$ bir izdüşümsel düzlemmiş. Bariz olmamasına karşın bu geometri $P(\mathbb{Z}_5^3)$ ile aynı. Aynı demekle bir geometriden diğerine giden, doğruları doğrulara götüren ve noktalarla doğruların ilişkisini koruyan birebir örten bir gönderimden, yani bir *izdüşümsel uzay izomorfisinden* söz ediyoruz. Şu alıştırmaları yapmakla yetinelim.

Alıştırma 32. *$P(\mathbb{Z}_5^3)$'de bir doğrudaki nokta sayısını bulun. Bunu yapmanın kolay bir yolu, $z=0$ doğrusundaki noktaları saymak. Ayrıca geometrideki toplam nokta sayısını bulun.*

Alıştırma 33. *p asal olmak üzere $P(\mathbb{Z}_p^3)$'de bir doğrudaki nokta sayısını ve toplam nokta sayısını bulun.*

$PG(2,q)$'nun bir asal üssü olmayan hangi q'lar için var olduğu bilinmiyor. Ayrıca verilen herhangi bir q için birbirine izomorf olmayan kaç $PG(2,q)$ olabileceği de açık soru. Oysa $n \geq 3$ durumunda $PG(n,q)$'nun yalnızca asal üssü q'lar için var olduğu biliniyor. Üstelik bu durumlarda tek bir izomorfi sınıfı olduğu ve böylece $n \geq 3$ için izdüşümsel geometrilerin hepsinin doğrusal cebirden geldiği biliniyor. Bu konularda kaynak önerileri için Coxeter'in kitabına bakın **??**.

Ders 7: Konikler - Tanım

Şimdiye kadar nokta ve doğrular ve bunların ilişkilerini konuştuk. Bu derste yeni bir kümeden söz edeceğiz: kuadrikler ve düzlemdeki özel adı konikler.

İzdüşümsel doğrular, doğrusal ifadeler ve vektör uzayındaki iki boyutlu alt uzaylar tarafından anlatılıyor. Bir *izdüşümsel çemberden* söz etmek istersek, bunun bir yolu Sınav 1, Soru 3'te olduğu gibi kareler içeren kuadratik bir ifade kullanmak. Burada hoş olmayan şey, böylece belki de vektör uzayı ve doğrusal cebirden bağımızı kopartmamız. Öyle ya, kuadratik bir ifade doğrusal bir altuzay anlatmıyor. Bu derste kuadratik ifadelerin doğrusal cebirde neye karşılık geldiğini göreceğiz.

7.1 Homojen fonksiyon

$f : V \to \mathbb{F}$ fonksiyonunun izdüşümsel uzayda $[\{f(v) = 0\}]$ kümesini iyi tanımlayabilmesini istiyoruz. Bunun için gerek yeter koşul her $v \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için $f(v) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda v) = 0$ denkliğinin sağlanması. Bu koşulu sağlayan bir fonksiyon ailesi tanımlayalım:

Tanım 6. *V ve W bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $f : V \to W$ herhangi bir gönderim olsun. Eğer*

$$f(\lambda v) = \lambda^k f(v)$$

eşitliği sabit bir k pozitif tamsayısı ve her $v \in V$ için sağlanıyorsa f'ye k mertebesinden bir homojen fonksiyon *denir.*

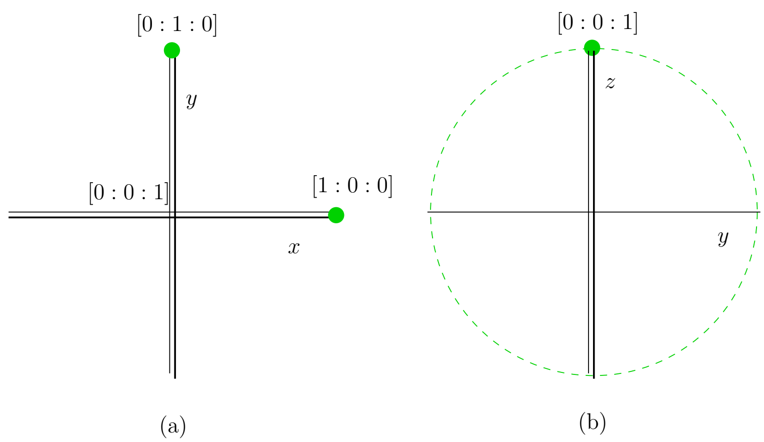
V'den $\mathbb{F}$'ye 1. mertebeden homojen fonksiyonlar doğrusal dönüşümler yani V^* eşlek uzayının elemanları. Şimdi 2. mertebeden homojen fonksiyonlar alarak bunları sıfır yapan noktaların kümesinin neye benzediğine bakacağız.

Örnek 1. $\mathbb{R}P^2$'de $C_1 = \{[x : y : z] \,|\, x \cdot y = 0\}$ kümesine bakalım. $x \cdot y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 2. mertebeden homojen. Şimdi birkaç yamada C_1'i görelim.

$z = 1$ yamasında $C_1 \cap \{z = 1\} = \{[x : y : 1] \,|\, xy = 0\}$ olacak. x-y düzleminde bu kümeyi Şekil 6(a)'daki gibi. *Sonsuzdaki* noktalar için C_1 üzerinde $z = 0$ olan noktaları bulmalıyız. Bu noktaların kümesi $\{[x : y : 0] \,|\, xy = 0\} = \{[x : 0 : 0], [0 : y : 0]\} = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}$; yani sonsuzda iki nokta var. Bunlar Şekil 6(a)'daki doğruların sonsuzdaki noktaları ve yeşil renkle gösterilmiş.

Şimdi $x = 1$ yamasında C_1'e bakalım. y-z düzleminde gördüğümüz şu küme olacak: $C_1 \cap \{x = 1\} = \{[1 : y : z] \,|\, y = 0\} = \{[1 : 0 : z]\}$; yani z ekseni (Şekil 6(b)). Demin kesişen iki doğru görüyorduk, şimdi bir doğru görüyoruz. Diğer doğru nerede? Tabii ki sonsuzda. C_1'in ifadesine $x = 0$ koyarsak $\{[0 : y : z] \,|\, xy = 0\} = \{[0 : y : z]\}$ kümesini buluruz ki bu $x = 1$ yaması için sonsuzdaki doğru. Şekil 6(b)'de bu doğruyu kesikli yeşil çember olarak çizdik. Bu iki doğru sonsuzda $[0 : 0 : 1]$ noktasında kesişiyor. Dolayısıyla Şekil 6(a) ve Şekil 6(b) aynı C_1 kümesinin iki ayrı yamadan görünüşü.

Örnek 2. Yukarıdaki örnek bir miktar hayal kırıklığı çünkü 2. mertebeden aldığımız bir fonksiyonun sıfır kümesi yine doğru çıktı, ama neyse ki iki doğru.



Şekil 6: C_1 kümesinin iki ayrı yamada görünüşü; yeşil noktalar sonsuzda.

Şimdiki örnekte ifadeyi biraz daha karmaşık alalım:

$$C_2 = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}P^2$$

olsun. Bu kümeyi birkaç yamada çizeceğiz.

$z = 1$ yamasında C_2 kümesi $\{x^2 + y^2 = 1\}$ olarak yani birim çember gibi görünüyor (Şekil 7(a)). Sonsuzda hiçbir nokta yok çünkü $z = 0$ için $x^2 + y^2 = 0$ elde ediyoruz. Bu eşitliğin $\mathbb{R}$'de tek çözümü $(0, 0)$ ancak bu durumda izdüşümsel bir nokta elde etmiyoruz.

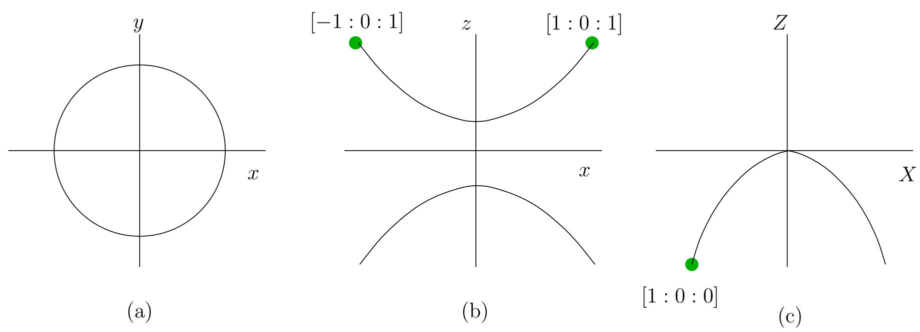
$y = 1$ yamasında C_2 kümesi $\{-x^2 + z^2 = 1\}$ olarak yani bir hiperbol gibi görünüyor (Şekil 7(b)). Sonsuzdaki noktaları bulmak için $y = 0$ olduğu durumdaki çözümlere bakıyoruz. Elde edilen $x^2 = z^2$ eşitliği $x = z$ veya $x = -z$ verecek; yani sonsuzda $[1 : 0 : 1]$ ve $[1 : 0 : -1]$ noktaları var (Şekil 7(b)'de yeşil noktalar).

Son olarak, önce $\mathbb{R}^3$'te bir koordinat dönüşümü yapalım:

$$\alpha = x + z, \; \beta = y, \; \gamma = x - z.$$

Yeni koordinatlarda C_2 kümesi $\{[\alpha : \beta : \gamma] \mid XZ + \beta^2 = 0\}$ olarak tarif edilir. Şimdi $\gamma = 1$ yamasına bakalım (eski $x = z + 1$ yaması). Bu yamada küme $\{\alpha + \beta^2 = 0\}$ olarak yani bir parabol olarak görünüyor (Şekil 7(c)). Sonsuzda tek nokta var: $\gamma = 0$ konduğunda eşitlik $\beta = 0$ verecek. Dolayısıyla sonsuzdaki nokta yeni koordinatlarda $[1 : 0 : 0]$.

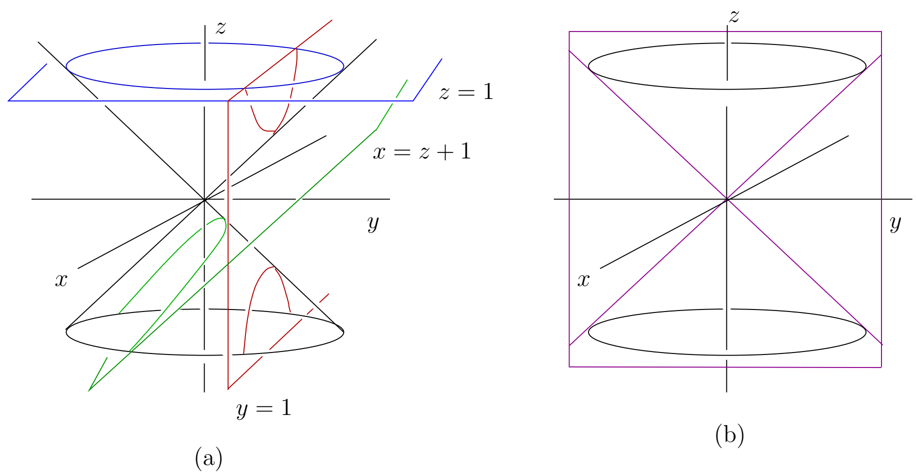
Dolayısıyla C_2 kümesi alınan üç ayrı yamada üç ayrı eğri olarak göründü: bir elips (çember), bir hiperbol ve bir parabol. Bunda şaşırtıcı bir şey yok. Yukarıda yama alarak ne yaptığımıza başka bir açıdan bakalım. $z = 1$ yamasını kullanmak, aslında $\mathbb{R}^3$'te $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ konisiyle $z = 1$ düzlemini kesiştirmek demek. Benzer şekilde $y = 1$ yamasını kullanmak, koniyi $y = 1$ düzlemiyle, $x = z + 1$ yamasını kullanmak koniyi $x = z + 1$ düzlemiyle kesmek demek (Şekil 8(a)). Bu



Şekil 7: C_2 kümesinin üç ayrı yamada görünüşü; yeşil noktalar sonsuzda.

kesitler, kesen düzlemde sırasıyla bir elips, bir hiperbol ve bir parabol olarak görünecek. Hatta şunu da biliyoruz ki bir koni bir düzlemle kesildiğinde arakesit (*şanssız durumlar* dışında) bu üç eğriden biri olur. Bu eğrilere *konik kesitler* denir. Şanssız durumların ilki (Şekil 8(b)) koniyi z eksenini içine alan bir düzlemle kesmek; bu durumda arakesiti iki doğru oluşturuyor (Örnek 1'deki gibi!). İkinci şanssız durumsa koniyi x-y düzlemiyle kesmek. Bu durumda elde edilen tek nokta $(0, 0, 0)$ ve bu nokta izdüşümsel düzlemde tabii ki yok.

koniklerin tarihi



Şekil 8: Bir koninin dört ayrı kesiti: (a)'da konik kesitler, (b)'de doğru çifti.

7.2 Simetrik çift-doğrusal form ve kuadratik form

Yukarıda 2. mertebeden homojen fonksiyonlar için yaptıklarımızı şimdi doğrusal cebirin önemli bir nesnesinin üstüne kuracağız. Hatırlayalım:

Tanım 7. *Her $u, v, w \in V$ ve $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $h : V \times V \to \mathbb{F}$ gönderimine* simetrik çift-doğrusal form *denir:*
• $h(u, v) = h(v, u)$ *(simetrik);*
• $h(\lambda u + \beta v, w) = \lambda h(u, w) + \beta h(v, w)$ *(birinci girdisine göre doğrusal).*

Eğer 0'dan başka vektörler de her vektörle h'ye girdiklerinde 0 çıkarıyorsa böyle bir forma yoz *denir; yani yoz olmayan bir form şu koşulu sağlar:*

$$\text{Her } u \in V, h(u, v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Tanımda birinci ve ikinci koşullar, ikinci girdiye göre de doğrusallığı zorunlu kılıyor. Böyle bir gönderime çift-doğrusal dememizin nedeni bu.

V için seçilmiş herhangi bir $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tabanı ve iki vektör $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ ve $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ için

$$\begin{aligned} h(u, w) &= h(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{i=1}^n b_i v_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j h(v_i, v_j) \\ &= (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= u^T H v \end{aligned}$$

bulunur. Burada $h_{ij} = h(v_i, v_j)$ idi. Demek ki V'ye seçilen her taban için h formuna n'ye n bir matris karşılık geliyor.

Alıştırma 34. *h'nin yoz bir form olmasıyla H'nin tekil bir matris olması denktir, gösterin.*

Tanım 8. *Bir simetrik çift-doğrusal form h verildiğinde $q : V \to \mathbb{F}$, $v \mapsto h(v, v)$ diye tanımlanan q gönderimine* kuadratik form *denir.*

Tanımdan hemen $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla bir kuadratik form her zaman 2. mertebeden homojen bir fonksiyon imiş. Şimdi şu hesaba bakalım:

$$q(u + v) = h(u + v, u + v) = h(u, u) + h(v, v) + 2h(u, v)$$

ve böylece

$$2h(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$$

olur; yani $\mathbb{F}$'de 2'ye bölmek varsa, verilen herhangi bir q'ya karşılık gelen bir h bulabiliriz ve böylece her q'yu bir kuadratik form yaparız. Demek ki 2'ye bölmenin olduğu cisimler üzerinde 2. mertebeden her homojen polinomu da bir kuadratik form olarak görebiliriz.

Tanım 9. *$h : V \to \mathbb{F}$ kuadratik formunun sıfırlarının $P(V)$'de temsil ettiği noktaların kümesine* kuadrik *denir. Düzlemdeki kuadriklerin özel adı* konik*tir. Kuadratik form yoz ise karşılık gelen kuadrik* tekil *olarak adlandırılır.*

Yukarıda Örnek 1 ve Örnek 2'deki kuadratik formların $\mathbb{R}^3$'ün standart tabanına göre matrisleri sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan ilk kuadratik form yoz, ikincisi değil.

Alıştırma 35. *İzdüşümsel düzlemde üçer üçer eşdoğrusal olmayan beş noktadan bir ve yalnız bir tekil olmayan konik geçer; kanıtlayın.*

7.3 Kuadratik formların sınıflandırılması

Şimdi savımız bir doğrusal dönüşümle kuadratik formların standart bir biçime dönüştürülebileceği. Örneğin yukarıdaki Örnek 1'deki kuadratik formu ele alalım.

$$x = \alpha + \beta,\ y = \alpha - \beta,\ z = \gamma$$

dönüşümüyle $v = (x, y, z)$ vektörü üstünde $q(v) = xy = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ olur. Savımız tam olarak şu:

Teorem 20. *$\mathbb{R}$ üzerinde n boyutlu V vektör uzayında her kuadratik form V'nin bir koordinat dönüşümüyle*

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=1}^{q} x_{p+i}^2, (p + q \leq n)$$

biçiminde yazılır. Eğer V uzayı $\mathbb{C}$ üzerindeyse her kuadratik form bir koordinat dönüşümüyle

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2, (m \leq n)$$

biçiminde yazılır.

Eğer kuadratik form yoz değilse, $p + q = n$ ve $m = n$ olur.

Bu teoremin kanıtının izinden gidelim. q bir kuadratik form, h onu doğuran simetrik çift-doğrusal form ve S matrisi V'nin bir $\mathcal{B}$ tabanından bir $\mathcal{B}'$ tabanına koordinat dönüşümü matrisi olsun.

$$q(u_{\mathcal{B}}) = h(u_{\mathcal{B}}, u_{\mathcal{B}}) = u_{\mathcal{B}}^T H_{\mathcal{B}} u_{\mathcal{B}} = (S u_{\mathcal{B}'})^T H_{\mathcal{B}} S u_{\mathcal{B}'} = u_{\mathcal{B}'}^T (S^T H_{\mathcal{B}} S) u_{\mathcal{B}'}$$

olduğundan $H_{\mathcal{B}'} = S^T H_{\mathcal{B}} S$ buluruz. Burada altindisler vektörün, matrisin vs. hangi tabanda ifade edildiğini gösteriyor.

Eğer S dönüşümü h formunu Teorem 20'nin istediği biçime sokuyorsa $H_{\mathcal{B}'}$ köşegen bir matris olur. Dolayısıyla standart biçime sokma işlemi aslında $S^T H_{\mathcal{B}} S$ köşegen bir matris olacak biçimde tekil olmayan bir S matrisi bulma işlemidir. $H_{\mathcal{B}}$ reel girdili simetrik bir matris. Doğrusal cebir kuramı, simetrik matrislerin köşegenleştirilebileceğini, yani $P^{-1} H_{\mathcal{B}} P$ matrisini köşegen kılan, tekil olmayan bir P matrisinin varlığını garanti ediyor. Hatta reel girdili simetrik bir matrisin de tüm özdeğerlerinin reel olduğunu ve üstelik P matrisinin ortogonal bir matris olarak alınabileceğini söylüyor. Böylece $P^T P$ matrisini birim matris yani P'nin tersini P^T kabul edebiliriz. Dolayısıyla $P^T H_{\mathcal{B}} P$ köşegen bir matris. Demek ki teoremde istenen S matrisi P olarak seçilebilir. Köşegen matrisin her bir köşegen girdisi $H_{\mathcal{B}}$ matrisinin bir özdeğeri olacak. Cisim $\mathbb{R}$ ise, S'nin anlattığı koordinat dönüşümünden sonra $x'_i = \sqrt{|\lambda_i|}x_i$ dönüşümü uygulanarak Teorem 20'nin birinci savı kanıtlanmış olur (Burada $\{x'_i\}$ son, $\{x_i\}$ bir önceki taban).

Eğer cisim $\mathbb{C}$ ise, bu verdiğimiz kanıtta P matrisi ortogonal değil Hermisyen oluyor. İstenen S matrisi P olarak seçilemiyor. Yine de teoremin ikinci savı doğru. Böyle bir dönüşümün varlığı konusunda fikir vermesi açısından reeller üzerinde aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3. $\mathbb{R}^3$'te $u = (x, y, z)$ için $q(u) = xy + yz + xz$ kuadratik formunu alalım. Adım adım koordinat dönüşümleriyle bu formu Teorem 20'nin istediği düzene sokacağız:

$$\begin{array}{rcl} q(u) & = & xy + yz + xz \\ {\scriptstyle (x=\alpha+\beta,\, y=\alpha-\beta)} \rightsquigarrow & = & (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)\gamma + (\alpha+\beta)\gamma \\ & = & \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\gamma \\ & = & (\alpha+\gamma)^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\ {\scriptstyle (X=\alpha+\gamma,\, Y=\beta,\, Z=\gamma)} \rightsquigarrow & = & X^2 - Y^2 - Z^2 \end{array}$$

Benzer biçimde $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ üzerinde bir kuadratik form, *kareler yaratarak* ve *karelere tamamlayarak* bu düzene getirilebilir.

Çözüm için başka bir yol da tutulabilirdi; geçen paragrafta anlatıldığı gibi, q formunun standart tabandaki matrisi köşegen hale getirilebilirdi.

Alıştırma 36. *$q(u) = xy + yz + xz$ formunun standart tabandaki matrisini yazın. Matrisin özdeğer ve özvektörlerini bularak köşegen hale getirin. Formu Teorem 20'de verilen standart biçime dönüştüren koordinat dönüşümünü yazın.*

Sonuç 21. *$\mathbb{R}P^2$'de tekil olmayan herhangi bir konik, homojen koordinatların bir dönüşümü ardından $C_\pm = \{x^2 + y^2 \pm z^2 = 0\}$ olarak verilir. C_+ boş kümedir. C_- ise çembere homeomorftur.*

$\mathbb{C}P^2$'de tekil olmayan herhangi bir konik, homojen koordinatların bir dönüşümü ardından $C = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ olarak verilir.

Kanıt. C_-'nin çember olduğunu söylemek için her koordinat dönüşümünün bir homoemorfi olduğunu (Alıştırma 14) ve bir yamanın tanım gereği kalkış ile varış kümeleri arasında bir homeomorfi olduğunu anımsamak ve sonra Örnek 2'de Şekil 7(b)'ye başvurmak yeterli. □

Alıştırma 37. *Cümleyi tamamlayın ve karelere tamamlama yoluyla kanıtlayın: $\{(x, y) \in R^2 ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\}$; $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, a \neq 0$ kümesi ya bir elips ya bir parabol ya bir hiperbol ya ... ya ... ya da ....*

Ders 8: Konikler - Doğrularla kesişim

Geçen ders $\mathbb{R}P^2$'de tekil olmayan her koniğin bir dönüşümün ardından tek bir koniğe dönüştüğü sonucuna vardık; o da $\{[x : y : z \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0]\}$ idi. Bu derste bu koniğin topolojik özelliklerini, doğrularla kesişimlerini ve genel olarak kuadriklerin küme olarak neye benzediklerini inceleyeceğiz.

8.1 Nokta kümesi olarak konik

Şimdi tekil olmayan bir koniğin noktalarının bir doğrunun noktalarıyla birebir eşlenebileceğini, hatta bu eşlemenin basit bir geometrisinin olduğunu göstereceğiz.

Teorem 22. *$P(V)$'de $\mathcal{C}$ tekil olmayan bir konik, $A \in \mathcal{C}$ bir nokta ve $P(U)$ A'yı içermeyen bir doğru olmak üzere öyle bir $\alpha : \mathcal{C} \to P(U)$ birebir eşlemesi vardır ki, her bir $X \in P(U)$ için A, X, $\alpha(X)$ noktaları eşdoğrusaldır.*

Kanıt. $\mathcal{C}$'yi tarif eden simetrik çift-doğrusal form h; $[a] = A$, $[x] = X$ olsun. $A \in \mathcal{C}$ olduğundan $h(a, a) = 0$'dır. $A \neq X$ olduğundan a ve x'ten bağımsız bir $y \in V$ seçerek V için $\{a, x, y\}$ tabanını oluşturabiliriz. Bu tabanda h'nin matrisi

$$H = \begin{pmatrix} 0 & h(a,x) & * \\ h(a,x) & h(x,x) & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

olur. H tekil olmadığından $h(a, x)$ ve $h(x, x)$'ten en az biri 0'dan farklı olacak.

$[p] = P$ noktası, AX doğrusuyla $\mathcal{C}$ koniğinin kesişim noktası olsun. $P \in AX$ olduğundan $p = \lambda a + \beta x$ olmalı; P aynı zamanda $\mathcal{C}$'nin üzerinde olduğundan $h(p, p) = 0$ olmalı. Böylece

$$\begin{aligned} 0 = h(p,p) &= h(\lambda a + \beta x, \lambda a + \beta x) \\ &= \lambda^2 h(a,a) + 2\lambda\beta h(a,x) + \beta^2 h(x,x) \\ &= 2\lambda\beta h(a,x) + \beta^2 h(x,x) \\ &= \beta\,(2\lambda h(a,x) + \beta h(x,x)) \end{aligned}$$

buluruz.

$\beta = 0$ ise $P = A$ olur. Şimdi α gönderimini $\lambda = h(x, x)$ ve $\beta = h(a, x)$ olacak şekilde

$$\alpha : P(U) \to \mathcal{C},\ X \mapsto [h(x,x)a - 2h(a,x)x]$$

diye tanımlayalım. $\alpha(X)$'in $\mathcal{C}$ üstünde olduğu açık. Başka bir $x' = kx$, $(k \in \mathbb{F})$ için $\alpha([x']) = [h(kx, kx)a - 2h(a, kx)kx] = [k^2(h(x, x)a - 2h(a, x)x)] = \alpha([x'])$ olduğundan α iyi tanımlı.

Alıştırma 38. *α'nın birebir ve örten olduğunu gösterin.*

□

8.2 Konik-doğru kesişimi

İki doğru bir ve yalnız bir noktada kesişiyor. Bir konik ve bir nokta kaç noktada kesişiyor? Birbirlerini ıskalayabilirler mi? Sonlu noktada mı kesişirler? Sonsuz ortak noktaları olabilir mi? Geçen dersteki Örnek 1'e bakalım. Oradaki yoz konik, içerdiği iki doğrudan her biriyle sonsuz ortak noktaya sahip. Diğer doğrular içinde $[0:0:1]$ noktasından geçen doğrularla tek bir, diğer doğrularla iki ayrı noktada kesişiyor. Demek ki bu problemin yanıtı çetrefilliymiş. Yine de $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ durumunda ve tekil olmayan konikler için düzlemde yanıtı tam olarak vereceğiz.

Önce doğrusal cebir tanımlarıyla başlıyoruz.

8.2.1 Dik uzay ve yutan uzay

Gereken doğrusal cebir gereçlerini alıştırmalar yardımıyla geliştirelim.

Tanım 10. *$h: V\times V\to\mathbb{F}$ simetrik çift-doğrusal bir form olsun. u ve $v\in V$ vektörleri $h(u,v)=0$ eşitliğini sağlıyorsa bu vektörlere h'ye göre* dik *denir, ve $u\perp_h v$ diye gösterilir.*

Bir U altuzayına dik uzay

$$U^{\perp_h}\doteq\{v\in V \mid \text{ her } u\in U \text{ için } (v,u)=0\}$$

olarak tanımlanır. Hangi form olduğu aşikar durumlarda $U^\perp$ olarak da yazılır ve "U dik" olarak okunur.

Alıştırma 39. *$U^\perp$ kümesinin gerçekten V'nin bir altuzayı olduğunu gösterin.*

Her vektör bir $\lambda\in\mathbb{F}$ katına diktir. Ayrıca $(U^\perp)^\perp=U$ olduğu da açık.

Alıştırma 40. *$U_1\subset U_2$ ise $U_2^\perp\subset U_1^\perp$, gösterin.*

Bir $\beta: V\to V^*$ gönderimi tanımlayalım. $\beta(v)=h_v$ olsun; h_v de şöyle tanımlansın: $h_v: V\to\mathbb{F}, h_v(u)\doteq h(v,u)$. Bu tanımı makul çünkü h_v'nin doğrusal olduğu bariz.

Alıştırma 41. *β gönderiminin bir izomorfi olduğunu gösterin.*

β altında $U^\perp$'in görüntüsünü merak ediyoruz. $v\in U^\perp$ ise her $u\in U$ için $h(v,u)=0$ yani $\beta(v)(u)=0$. Öyleyse $\beta(U^\perp)$'de V^*'ın öyle elemanları var ki herhangi bir $u\in U$'yu yediğinde 0 çıkarıyor; yani $\beta(v)|_U\equiv 0$.

Tanım 11.

Alıştırma 42. *$\mathcal{C}$ düzlemde tekil olmayan bir konik olsun. Eğer bir X noktası sabit bir l doğrusu boyunca geziniyorsa, X'in polar doğrusu hep sabit bir Y noktasından geçer. Gösterin. Y ile l arasındaki ilişki nedir?*

Bir $U\subset V$ altuzayındaki her bir vektörü yediğinde 0 çıkaran V^*'ın elemanlarının uzayına U'yu yutan uzay *denir ve U° olarak gösterilir, "U sıfır" okunur.*

Alıştırma 43. *U° kümesinin gerçekten V^*'nin bir altuzayı olduğunu gösterin.*

Tanımdan hemen önceki tartışma, $\beta(U^\perp) \subset U^\circ$ olduğunu gösterdi. Bunun tersi de doğru.

Alıştırma 44. *$\beta(U^\perp) = U^\circ$ olduğunu gösterin.*

Teorem 23. *$U \subset V$ olmak üzere,*
(1) boyut(U) + boyut(U°) = boyut(V)*;*
(2) boyut(U) + boyut$(U^\perp)$ = boyut(V)*.*

Kanıt. Bir önceki alıştırma sayesinde (2), (1)'in bir sonucu olacak. Şimdi (1)'i kanıtlayalım.

V'nin boyutu n olsun. $\{u_1, \dots, u_k\}$ U'nun, $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$ ise V'nin bir tabanı olsun ($k + l = n$). Eşlek taban $\{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_l\}$ olsun. f_i ($i = 1, \dots, k$) U°'da olamaz çünkü $f_i(v_i) = 1$. Diğer tarafta, her $j = 1, \dots, l$ ve $i = 1, \dots, k$ için $g_j(u_i) = 0$ olduğu için her bir g_j U°'da. Dolayısıyla $\{g_1, \dots, g_l\}$, U° altuzayının bir tabanı. □

Şimdi bu bilgileri izdüşümsel geometriye çıkaralım:

Tanım 12. *$A = [a] \in P(V)$ bir nokta ve h, V üzerinde simetrik çift-doğrusal bir form olsun. a'nın gerdiği doğrunun h'ye göre V'de dik uzayı $P(V)$'de bir izdüşümsel altuzay anlatır. Bu uzayı $A^{\perp_h}$ ya da $A^\perp$ olarak göstereceğiz. Yani*

$$A^\perp = [\{x \in V | h(a, x) = 0\}].$$

Eğer $P(V)$ bir düzlemse $A^\perp$ bir doğrudur (Teorem 23); bu doğruya A noktasının polar doğrusu *ya da* poları *denir.*

Alıştırma 45. *$\mathcal{C}$ düzlemde tekil olmayan bir konik olsun. Eğer bir X noktası sabit bir l doğrusu boyunca geziniyorsa, X'in polar doğrusu hep sabit bir Y noktasından geçer. Gösterin. Y ile l arasındaki ilişki nedir?*

8.2.2 $\mathbb{C}P^2$'de konik-doğru kesişimi

Bir doğruyla bir koniğin ortak tek noktası varsa doğru koniğe *teğet* diyeceğiz. Şimdi artık konik-doğru kesişimi için bir teorem yazmaya hazırız.

Teorem 24. *$\mathcal{C} \subset \mathbb{C}P^2$ tekil olmayan bir konik olsun.*
(1) $\mathbb{C}P^2$'de herhangi bir doğru $\mathcal{C}$ ile ya 1 ya da 2 ayrı ortak noktaya sahiptir.
(2) $P \in \mathcal{C}$ bir nokta olsun. $\mathcal{C}$'ye P'de teğet tek doğru $P^\perp$ doğrusudur.
(3) $\mathcal{C}$ üzerinde olmayan bir P noktasının poları $\mathcal{C}$'yi iki ayrı noktada keser. Üstelik, bu noktaların polar doğruları P noktasında kesişir.

Kanıt. (1) V'de gelişigüzel iki bağımsız vektör u_1 ve u_2'nin tarif ettiği izdüşümsel doğru L olsun. Bu durumda L üzerinde bir $[x] = [\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2]$ noktasının aynı zamanda $\mathcal{C}$ üstünde olması için $h(x, x) = 0$ olmalı. Burada $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, en az biri 0'dan farklı, diyelim λ_2. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 = h(x,x) &= h(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \\ &= \lambda_1^2 h_{11} + 2\lambda_1\lambda_2 h_{12} + \lambda_2^2 h_{22} \\ (\beta = \lambda_1/\lambda_2) \rightsquigarrow &= h_{11}\beta^2 + 2h_{12}\beta + h_{22} \end{aligned}$$

olur. Burada $h_{ij} = h(u_i, u_j)$. Dolayısıyla β için çakışık da olabilecek iki kompleks değer var.

(2) Köklerin çakışık olma durumu, yani $L \cap \mathcal{C}$'nin tek bir $P = [p]$ noktası olması, $h_{12}^2 - h_{11}h_{22} = 0$ olduğunda gerçekleşir. $u_1 = p$ alalım. $A \in \mathcal{C}$ olduğundan $h_{11} = h(p,p) = 0$ olur. Dolayısıyla $[u_2] \in L$ olacak biçimde başka hangi u_2 seçilirse seçilsin $h_{12} = h(p, u_2) = 0$ bulunur. Yani L doğrusu P'nin poları olmak zorunda kalır yani $\mathcal{C}$'ye bir tek P'de dokunan biricik doğru var.

(3) $P \notin \mathcal{C}$ olsun. $P^\perp \cap \mathcal{C}$'de bir ya da iki nokta var. Her bir A noktasının poları hem $\mathcal{C}$'yi tek bir noktada (A'da) keser, hem de P'yi içerir çünkü $A \in P^\perp$ olduğundan $h(a,p) = 0$ olduğunu biliyoruz. Geriye kalan, $P^\perp \cap \mathcal{C}$'nin bir değil iki noktaya sahip olduğunu ispatlamak. $P^\perp$ koniğe bir tek A noktasında dokunduğundan $P^\perp$ de AP doğrusu olmalı; yani $P^\perp$, P'yi içeriyor. Demek $h(p,p) = 0$ imiş, yani $P = A \in \mathcal{C}$. Sonuç olarak P noktası $\mathcal{C}$'nin üstünde değilse tek noktada kesişme olası değil. $\square$

Alıştırma 46. $\mathbb{R}^2$*'de birim çemberin içinde orjin dışında bir nokta alın ve polar doğrusunu hesaplayın.*

Alıştırma 47. $\mathbb{R}P^2$*'de bir* α *doğrusu ve bir* $\mathcal{C}$ *koniği (a) tam iki ortak noktaya sahip olabilir mi? (b) ortak tek bir noktaya sahip olabilir mi? (c) kesişmeyebilir mi? Herbir şık için yanıtınız evetse örnek verin, hayır ise olamayacağını kanıtlayın.*

Sınav 3

Sınav 3

1. Bir izdüşümsel uzaydaki doğruların kümesinin bir izdüşümsel uzay yapısına sahip olduğunu gösterin. Benzer biçimde, bir izdüşümsel uzaydaki kuadriklerin kümesinin de bir izdüşümsel uzay yapısına sahip olduğunu gösterin. Bu yeni uzayların boyutları nedir?

2. Fano Beliti. $P(V)$ düzleminde öyle A, B, C, D noktaları olsun ki herhangi üçü eşdoğrusal olmasın. Bu noktaların ikişer ikişer tanımladıkları doğruların kesişim noktalarına köşegen noktaları denir; örneğin $AB \cap CD$ noktası. Bu köşegen noktalarından herhangi üçünün eşdoğrusal olamayacağını gösterin.

3. $\mathbb{R}P^2$'de $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ koniğini alalım. Polar doğrusu $\mathcal{C}$ ile kesişmeyen bir nokta var mı? Ya bu noktayı inşa edin, ya da olmadığını kanıtlayın.

Ders 9: Bézout teoremi

Konikler doğrularla en fazla iki noktada kesişir. Şimdi iki koniğin kaç noktada kesiştiğini saptayalım. Bunu, çok kolay gözlemlerle başlayıp temel ve ünlü Bézout teoremini kanıtlayarak yapacağız. Bu teorem sayesinde homojen iki polinomun tarif ettiği kümelerin ortak noktalarının sayısının (eğer ortak parçaları yoksa) en fazla dereceleri çarpımı olduğunu göreceğiz. Böylece ortak parçaları olmayan iki koniğin en fazla dört noktada kesişeceğini söyleyivereceğiz.

9.1 Polinomların bileşkesi

İki koniğin kesiştiği noktaları bulmak aslında ikinci dereceden iki homojen polinomun ortak köklerini bulmak demek. Örneklerle gidelim.

Örnek 1. $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2)$ olmak üzere $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ ve $g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$ iki polinom olsun. Bu polinomların ortak kökleri şöyle bulunur. Eğer varsa birinin köklerini bulun ve diğerinde yerine koyun. Biz daha karmaşık görünen tuhaf bir yol tutacağız. $f = 0$ ve $g = 0$ denklemlerini ortak çözmek yerine şu doğrusal sisteme bakın:

$$\begin{array}{rcccccccc}
xf & = & a_0x^3 & + & a_1x^2 & + & a_2x & & \\
f & = & & & a_0x^2 & + & a_1x & + & a_2 \\
xg & = & b_0x^3 & + & b_1x^2 & + & b_2x & & \\
g & = & & & b_0x^2 & + & b_1x & + & b_2
\end{array}$$

Bu sistemin sağ tarafındaki 4'e 4 katsayılar matrisinin determinantına f ve g polinomlarının *bileşkesi* diyeceğiz ve $R_{f,g}$ olarak göstereceğiz. Eşitlikte sol tarafı bir sütun vektörü olarak düşünüp K, sağdaki katsayı sütunlarını da K_1, K_2, K_3, K_4 diye adlandırarak eşitlik

$$K = K_1x^3 + K_2x^2 + K_3x + 1 \cdot K_4$$

diye de yazılabilir. Cramer kuralına göre

$$1 = \det\left(K_1 \,\vdots\, K_2 \,\vdots\, K_3 \,\vdots\, K\right) / \det\left(K_1 \,\vdots\, K_2 \,\vdots\, K_3 \,\vdots\, K_4\right)$$

yani

$$\det\left(K_1 \,\vdots\, K_2 \,\vdots\, K_3 \,\vdots\, K\right) = \det\left(K_1 \,\vdots\, K_2 \,\vdots\, K_3 \,\vdots\, K_4\right) = R_{f,g}$$

bulunur. Dikkat ederseniz, sol taraftaki matrisin yalnızca son sütununda f ve g görülüyor ve her bir satırda ikisinden yalnızca biri var. Dolayısıyla u ve v 1 dereceli polinomlar olmak üzere

$$R_{f,g} = uf + vg$$

olmalı. Şimdi doğruluğu hemen görülen ilk sonuç:

Sav 25. *f ve g'nin ortak kökü varsa $R_{f,g} = 0$ olmalı. Ters olarak, f ve g'nin ikişer reel kökü olsun; eğer $R_{f,g} = 0$ ise f ve g'nin ortak kökü vardır.*

Kanıt. İlk cümlenin doğruluğu yukarıdaki eşitlikçe bariz. İkinci cümle için, v polinomu f'yi bölse de bölmese de, f'nin çarpanlarından biri g'yi bölmek zorunda. $\square$

Bu örnekte yazdığımız her şey genel durum için de çalışıyor. $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_m x^{m-i}$ ve $g(x) = \sum_{i=1}^{n} b_n x^{n-i}$, $\mathbb{F}[x]$ polinom halkasında iki polinom olsun.

Tanım 13. *f'nin katsayılarını n kez, g'nin katsayılarını m kez kaydırıp yazarak elde edilen*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & & b_n & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & & b_n \end{pmatrix}$$

matrisine f ve g'ye ait Sylvester matrisi*, determinantınaysa* f ve g'nin bileşkesi *denir. Bileşke $R_{f,g}$ olarak gösterilir.*

Şu savın kanıtı aynen Örnek 1'deki gibi.

Sav 26. *f ve g'nin ortak kökü varsa $R_{f,g} = 0$ olmalı. Ters olarak, f ve g'nin $\mathbb{F}$'de sırasıyla m ve n kökü olsun (örneğin $\mathbb{F}$ cebirsel kapalı olsun). Eğer $R_{f,g} = 0$ ise f ve g'nin ortak kökü vardır ve bu kökler Sylvester matrisinin çekirdeğiyle belirlenir.*

Alıştırma 48. *$f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının Sylvester matrisinin çekirdeğinin boyutuyla f ve g'nin en büyük ortak böleninin derecesinin birbirine eşit olduğunu gösterin.*

Örnek 2. İki koniği kesiştirmekten henüz uzağız çünkü konikler üç değişkenli, ikinci dereceden homojen polinomlarla veriliyor. Öyleyse şimdi ikinci dereceden iki polinom $f, g \in \mathbb{F}[x, y]$ alalım. Herhangi bir $y = y_0$ için $F(x) \doteq f(x, y_0)$ ve $G(x) \doteq g(x, y_0)$ polinomlarını tanımlayalım. Şimdi bileşke y_0'a bağlı olacak. Daha önceki gibi, $R_{F,G}(y)$ herhangi bir y_0 için 0 ise F ve G'nin ortak bir x_0 kökü olacak ve (x_0, y_0), f ve g'nin ortak kökü olacak.

Genel olarak şunu elde ettik: $f, g \in \mathbb{F}[x, y]$ sırasıyla m ve n dereceli polinomlar olsun. f ve g'nin ortak kökü varsa bir y_0 için $R_{f,g}(y_0) = 0$ olmalı. Ters olarak, f ve g'nin $\mathbb{F}$'de sırasıyla m ve n kökü olsun; eğer bir y_0 için $R_{f,g}(y_0) = 0$ ise f ve g'nin ortak kökü vardır.

Örnek 3. f ve g ikinci dereceden üç bilinmeyenli homojen polinomlar olsun. Bu polinomları $f(x, y, z) = a_0(x, y)z^2 + a_1(x, y)z + a_2(x, y) = F_{x,y}(z)$ ve $g(x, y, z) = b_0(x, y)z^2 + b_1(x, y)z + b_2(x, y) = G_{x,y}(z)$ şeklinde düzenleyelim. z için ortak bir değer bulmak daha önceki gibi $R_{F,G}(x, y)$ bileşkesinin 0 olmasına denk (örneğin, $\mathbb{F}$ cebirsel kapalı iken).

Örnek 4. $f(x,y) = y - x^2$ ve $g(x,y) = xy - x^3 + y - x^2$ polinomlarının $\mathbb{R}$'de kaç ortak kökü var?

$$F(y) = y - (x^2),\ G(y) = (x+1)y + (-x^2 - x^3)$$

$(\mathbb{R}[x])[y]$'de iki tane 1 dereceli polinom. Ortak bir y köklerinin olabilmesi için

$$R_{F,G}(x) = \begin{vmatrix} 1 & -x^2 \\ x+1 & -x^2 - x^3 \end{vmatrix} = 0$$

olmalı. Ama hesap yapılırsa bileşke x'in değerlerinden bağımsız biçimde hep 0 bulunur. Burada ne oluyor? Olan şu: $g(x,y) = (x+1)f(x,y)$ eşitliği var. Yani f ve g, $f = y - x^2 = 0$ üzerindeki her noktayı ortak kök kabul ediyor.

Şu ana kadar gördüklerimiz toparlayalım:

Teorem 27. *Cebirsel kapalı bir $\mathbb{F}$ cismi üstünde $f(x,y,z)$ ve $g(x,y,z)$ homojen polinomlarının ortak kökü olması, yukarıdaki gibi tanımlanan $R_{F,G}(x,y)$ bileşkesini 0 yapan bir (x,y) ikilisinin varlığına denktir. Bileşke hep 0 ise, F ve G'nin ortak bir çarpanı vardır. F ve G'nin Sylvester matrisinin çekirdeğinin boyutu, F ve G'nin en büyük ortak böleninin derecesine eşittir.*

9.2 Bézout Teoremi I

Şimdi iki fonksiyonun bileşkesine ilişkin güçlü bir sava geldi sıra. Bu, Bézout Teoreme giden yolda son adım olacak.

Sav 28. *$f(x,y,z)$ ve $g(x,y,z)$ homojen polinomlarına yukarıdaki gibi karşılık gelen ve x, y'nin polinomlarını katsayı kabul eden $F(z)$ ve $G(z)$ polinomlarının dereceleri sırasıyla m ve n olsun. Bu durumda $R_{F,G}(x,y)$ bileşke polinomu homojendir ve derecesi mn'dir.*

Kanıt. Göstermemiz gereken, $R_{F,G}(tx,ty) = t^{mn} R_{F,G}(x,y)$ olduğu. Aşağıda a_i'ler ve b_j'ler x ve y'nin polinomları olmak üzere $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$

$$R_{F,G}(tx,ty) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 t & \cdots & a_m t^m & & & & \\ & a_0 & a_1 t & \cdots & a_m t^m & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & a_0 & a_1 t & \cdots & a_m t^m & \\ b_0 & b_1 t & \cdots & & b_n t^n & & & \\ & b_0 & b_1 t & \cdots & & b_n t^n & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & b_0 & b_1 t & \cdots & b_n t^n & \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada f ve g'nin homojen olduğunu ve bu yüzden a_i'nin ve b_i'nin derecelerinin i olduğunu kullandık. Şimdi bu son matriste ikinci satırı t ile, üçüncü satırı t^2 ile vs. ve m'inci satırı t^{m-1} ile ve devam ederek $m+2$'nci satırı

t ile vs. ve $m+n$'inci satırı t^{n-1} ile çarpalım. Çıkan yeni matriste sütunlarda ortak t çarpanları oluşacak. Bunları ayıklayarak

$$R_{F,G}(tx,ty) = \frac{1}{1 \cdot t \cdots t^{m-1} \cdot 1 \cdot t \cdots t^{n-1}} \cdot 1 \cdot t \cdots t^{m+n-1} R_{F,G}(x,y) = t^{mn} R_{F,G}(x,y)$$

buluruz. □

Teorem 29. (Bézout Teoremi I) $\mathbb{F}$ *cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere,* f *ve* g, $\mathbb{F}P^2$ *üstünde derecesi* m *ve* n *olan iki homojen polinom olsun. Bunların sıfırlarının anlattığı* $\mathcal{C}_f$ *ve* $\mathcal{C}_g$ *kümelerinin farklı* $mn+1$ *tane ortak noktası varsa* f *ve* g*'nin ortak bir böleni vardır.*

Kanıt. $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_g$'nin farklı $mn+1$ tane ortak noktası olsun. Bu noktaların ikişer ikişer tarif ettiği doğruların tümünün dışında bir nokta vardır (doğrular sonlu tane, oysa $\mathbb{F}$ sonsuz elemanlı). Genelliği bozmadan bu noktayı $[0:0:1]$ seçebiliriz; yani $[0:0:1]$ noktası hiçbir ortak nokta ikilisiyle eşdoğrusal değil. $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_g$'nin ortak bir noktaya sahip olması, bir (x_0, y_0) için $R_{F,G}(x_0, y_0) = 0$ olması demek (Teorem 27). Herbir ortak nokta için bir (x_i, y_i) ikilisi olacak $(i = 0, \ldots, mn)$. Eğer $i \neq j$ ise $[x_i : y_i] \neq [x_j : y_j]$ olmalı çünkü aksi durumda $[x_i : y_i : 1]$, $[x_j : y_j : 1]$ ve $[0:0:1]$ noktaları $y_i x - x_i y = 0$ doğrusu üstünde yer alır ki bunu baştan yasaklamıştık. Dolayısıyla mn dereceli $R_{F,G}(x,y)$ homojen polinomunun (Sav 28) $mn+1$ tane farklı oranlı kökünü bulmuş olduk. Bunun Cebirin Temel Teoremine çelişki oluşturmaması için tek yol $R_{F,G}(x,y)$ polinomunun hep sıfır olması, yani f ve g'nin ortak bir böleni olması (Teorem 27). □

Ders 10: Düzlemde cebirsel eğriler

İzdüşümsel geometride bir doğruyu derecesi 1 olan homojen bir polinomun sıfırları kümesi olarak tarif ettik. Bir kuadrik, derecesi 2 olan homojen bir polinomla anlatılıyordu (Bölüm 7.1). Benzer biçimde derecesi n olan homojen bir polinomun sıfırları kümesiyle ilgileneceğiz. En azından yerel olarak bir polinomun sıfırları kümesi olarak tarif edilen bir kümeye *cebirsel* denir. Tarif eden polinomun derecesine *cebirsel eğrinin derecesi* denir. Bu derste $\mathbb{R}P^2$'de cebirsel kümelerin birer *eğri* olduğunu, yani 1 boyutlu manifold olduğunu görüp bu eğrilerin düzlemde oturma biçimlerine ilişkin kafa yoracağız.

Bu ders artık son ders olduğu için, birkaç ünlü teoremi ve savı, kanıtsız vereceğiz. Bunları kanıtı daha çok cebirsel topoloji ya da geometri gerektiriyor. Burda amacımız bunları kabul edip resim çizmek, hesap yapmak. Özellikle kesen eğriler, kesişimin katlılığı, teğet olma, indirgenemez polinomlar vs gibi kavramları anmaktan kaçınıyoruz.

10.1 Cebirsel eğrilerin topolojisi

$\mathbb{R}P^2$'de bir polinomun sıfırları kümesi birkaç çemberin birleşimidir:

Teorem 30. *$\mathbb{R}P^2$'de tekil olmayan homojen bir polinomla belirtilen cebirsel bir küme sonlu sayıda çemberin ayrık birleşimine homeomorftur.*

Kanıt. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ homojen bir polinom, $\mathcal{C} = \{f = 0\}$ ve $P \in \mathcal{C}$ birim küre S^2'de bir nokta olsun. S^2 tıkız ve $\mathcal{C} = f^{-1}(0)$ S^2'de kapalı olduğundan $\mathcal{C}$ de tıkız olmalı.

P noktasında dışa doğru S^2'ye dik bir vektör boyunca f'nin yönlü türevi 0'dır. Dolayısıyla S^2'ye teğet bir yönde f'nin yönlü türevi 0'dan farklı olmalı; aksi durumda f'nin o noktada bir tekilliği olurdu. Kapalı Fonksiyon Teoremi uyarınca S^2 üzerinde P yakınlarında $\{f = 0\}$ bir aralığa homeomorf olmak zorunda (Başka bşr deyişler, P civarında $\{f = 0\}$ ile S^2 birbirlerini kesen konumdadır). Dolayısıyla $\mathbb{R}P^2$, S^2'nin 0'a göre simetrik noktalarının özdeşleştirilmesiyle oluşturulduğundan ve bu bölüm gönderimi yerel olarak homeomorfi olduğundan, $\{f = 0\}$ kümesi $\mathbb{R}P^2$'de de yerel olarak bir aralık gibi görünmeli, yani bir 1 manifold olmalı. Tıkız (kenarı olmayan) bir 1 manifoldun herbir bağlantılı parçasının S^1'e homeomorf olması gerektiğini biliyoruz. □

Alıştırma 49. *Yukarıdaki kanıttaki küçük boşluğu doldurun: Cebirsel bir eğrinin bağlantılı parçalarının sayısı neden sonlu sayıda olmalı?*

10.2 Yuvarlaklar ve tek taraflı parçalar

Bir cebirsel eğri, topolojik olarak birkaç ayrık çemberin birleşimiymiş. Şimdi birkaç örneğe bakalım.

Örnek 1. $\mathbb{R}P^2$'de bir doğru, bir çembere homeomorf. Hangi yamada bakarsak bakalım, doğrunun bir noktasını sonsuzda kaybediyoruz. Dolayısıyla herhangi bir yamada bir doğru, $\mathbb{R}^2$'nin sınırsız bir kümesi olarak görünüyor.

Örnek 2. $\mathbb{R}P^2$'de pürüzsüz bir konik, uygun bir yamada kapalı bir eğri olarak görünüyor (Ders 7).
Örnek 3. $\mathbb{R}^2$'de şu eğrilere bakalım: $\mathcal{C}_1 = \{(x^2+y^2-1)y = 0\}$; $\mathcal{C}_2 = \{y^2 = x^2+x^3\}$; $\mathcal{C}_3 = \{(x^2+y^2-1)y = \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$; $\mathcal{C}_4 = \{y = x^3\}$ (Şekil **??**). Bu eğrilerin ilk ikisi tekil (tekil noktalarını bulun). Üçüncü eğri, $\mathcal{C}_1$'in hafifçe dürtülmüşü; bağlantılı parçalarından biri sınırsız, diğeri bir çember olarak görünüyor. $\mathcal{C}_4$'ün tek bir parçası var; o da sınırsız. Bu eğrileri ifadelere bir z değişkeni sokarak *homojenleştirirsek*, yani örneğin $(x^2+y^2-1)y$ polinomunu $(x^2+y^2-z^2)y$ haline sokarsak, bu eğriler artık $\mathbb{R}P^2$'de birer eğri anlatacak. Tekil olmayan $\mathcal{C}_3$ ve $\mathcal{C}_4$'ün sırasıyla 2 ve 1 bağlantılı parçası olacak.

Alıştırma 50. *Yukarıdaki polinomları, derecesini bozmadan homojenleştirin. Bir $f \in \mathbb{F}[x,y]$ polinomunu nasıl homojenleştiriyoruz.*

Bu noktadan sonra artık $\mathbb{R}P^2$'de bir cebirsel eğriyle $\mathbb{R}^2$'de bir cebirsel eğriyi birlikte tartışabilir ve birinden diğerine homojenleştirme işlemiyle geçebiliriz.

Şimdi kendimize şu soruları soruyoruz: derecesi 3 olan bir eğrinin kaç tane bağlantılı parçası olabilir? Bir yamada sınırsız görünen bir parça, aynen koniklerde olduğu gibi başka bir yamada bir çember olarak görünebilir mi? İlk soruya yanıtı Harnack Teoremi veriyor (bu teoremin kanıtı için iyi bir kaynak **??**).

Teorem 31. (Harnack Teoremi) *Derecesi m olan pürüzsüz bir cebirsel eğrinin bağlantılı parça sayısı en fazla $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)+1$ olabilir.*

Dolayısıyla derecesi 3 olan bir cebirsel eğrinin en fazla 2 parçası olabilir (Örnek 3'teki $\mathcal{C}_3$ gibi).

Harnack Teoreminden önce sorduğumuz ikinci soruya yanıt kolay.

Alıştırma 51. *Derecesi tek olan cebirsel bir eğrinin her yamada bir sınırsız parçası olacağını kanıtlayın (sonsuzdaki doğru nasıl seçilirse seçilsin eğrinin sonsuzda yer alacak bir noktası olması gerektiğini kanıtlayın).*

Alıştırma 52. *Bir cebirsel eğrinin her yamada bir sınırsız parçası olacağını kanıtlayın (sonsuzdaki doğru nasıl seçilirse seçilsin eğrinin sonsuzda yer alacak bir noktası olması gerektiğini kanıtlayın).*

Alıştırma 53. *Bir cebirsel eğrinin herhangi bir yamadaki görüntüsünde birden fazla sınırsız parça olamayacağını kanıtlayın (Şekil 2'deki yamalardan birinde iki tane sınırsız parça çizmeye çalışın).*

Bir yamada sınırsız parça varsa tek ve varlığı seçilen yamadan bağımsız. Bu parçaya özel bir ad vereceğiz. Bu adın nerden geldiği hemen alttaki alıştırma sayesinde anlaşılacak.

Tanım 14. *$\mathbb{R}P^2$'de cebirsel bir eğrinin her yamada sınırsız görünen parçasına* tek taraflı parça *denir. Böyle olmayan bir parçaya, yani uygun bir yamada bir çember olarak görünen parçaya,* yuvarlak *denir.*

Alıştırma 54. *Sınırsız bir parçanın kapalı bir komşuluğunun Möbius şeridine homeomorf olduğunu kanıtlayın. Möbius şeridi şu bölüm uzayı olarak tanımlanır: $\{[-1,1]\times[-1,1]/(-1,t)\sim(1,-t)\}$. Möbius şeridinin orta enlemi, yani $\{0\}\times[-1,1]$ kümesinin sağı/solu yoktur, yani tek tarafı vardır.*

10.3 Yuvarlakların düzeni ve izotopi problemi

Pürüzsüz, cebirsel bir eğri herhangi bir yamada topolojik olarak sonlu sayıda yuvarlak ve derece tekse bir tane de tek taraflı parça olarak resmedilebilir. Şimdi soracağımız soru bu yuvarlakların düzlemde nasıl yerleşecekleri olacak. $\mathbb{R}^2$'de $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ adında iki pürüzsüz, cebirsel eğrinin yuvarlaklarının konumları, pürüzsüz eğriler üzerinden birbirine bir izotopiyle bağlıysa bu iki konumlanmayı eş tutacağız. Gösterilebilir ki $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$'nin böyle izotop olmaları için gerek ve yeter koşul, herbir eğrinin yuvarlaklarının birbirlerine göre konumlarının diğer eğriyle *eş* olması; daha kesin bir söyleyişle $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}_1$ ve $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}_2$'nin homeomorf olmaları. Bu derste, bu savı doğru kabul edip birkaç soru yanıtlamaya çalışalım.

Şu soruyu yanıtlamaya çalışalım: Derecesi 4 olan bir cebirsel eğrinin yuvarlakları nasıl görünür? Öncelikle, tek taraflı bir parçası olamaz (**??**). Yuvarlak sayısı en fazla 4 olabilir (Harnack Teoremi). Bu yuvarlakların birbirlerine göre konumları nasıl olabilir/olamaz? Bu düzenlemelerin dilini oturtmak amacıyla birkaç alıştırma ve tanım yapalım.

Alıştırma 55. *$\mathbb{R}P^2$'de cebirsel bir eğrinin bir yuvarlağı, $\mathbb{R}P^2$'yi iki parçaya ayırır. Bu parçalardan biri bir daireye, diğeri bir Möbius şeridine homeomorftur.*

Tanım 15. *Bir yuvarlağın $\mathbb{R}P^2$'den ayırdığı iki parçanın daireye homeomorf olanına* yuvarlağın içi *denir. Eğer bir yuvarlak diğerinin içinde yer alıyorsa bu yuvarlaklara* içiçe *diyeceğiz. Bir dizi yuvarlak içiçeyse bu yuvarlaklar bir* yuva *oluşturur. Bir yuvadaki yuvarlak sayısına yuvanın* derinliği *denir (Şekil* **??***).*

Sav 32. *Derecesi m olan bir cebirsel eğrinin iki yuvasının toplam derinliği $m/2$'yi geçemez.*

Kanıt. Yuvaların derinlikleri toplamı p olsun. Herbir yuvanın en içindeki yuvarlağın içinde birer nokta alalım. Bu iki noktadan geçen doğru yuvalardaki her yuvarlağı tam 2 ayrı noktada keser. Dolayısıyla cebirsel eğriyle doğrunun kesişimi en az $2p$ olmalı. Bézout Teoremi, eğriyle doğrunun en fazla $m \cdot 1 = m$ ortak noktası olacağını söylüyor. Böylece $2p < m$ buluruz. □

Bu engeller ışığında, derecesi 4 olan bir cebirsel eğrinin yuvarlaklarının Şekil **??**'tekilerden başka bir düzenleme içinde olamayacağını görüyoruz. Herbir düzenlemenin gerçeklenebileceğini de bunları veren eğrilerin var olduğunu söyleyerek kanıtlıyoruz. Örneğin, $\{x^4 + y^4 = -1\}$ eğrisinin $\mathbb{R}P^2$'de hiç noktası yok. $\{x^4 + y^4 = 1\}$ eğrisiyse tek bir yuvarlağa sahip.

Alıştırma 56. *Şekil* **??***'teki diğer yuvarlak düzenlemelerini veren ve derecesi 4'ten küçük bir polinoma bölünemeyen polinomlar bulun.*

Sınav 4

1. Şu kuadratik formlardan hangisi tekil olmayan bir konik tanımlıyor?
   - $x_0^2 - 2x_0x_1 + 4x_0x_2 - 8x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$;
   - $x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 - 2x_0x_2$.

2. Bir koniğin eşleği nedir? Şimdi bu soruya uygun bir yanıt bulacağız. h, $P(V)$ düzleminde yoz olmayan bir kuadratik form olsun ve $\mathcal{C}$ koniğini tarif etsin.
   (a) $A = [a] \in \mathcal{C}$ bir nokta olsun. Eşlek vektör uzayı V^*'da, $h_a : V \to \mathbb{F}$, $h_a(u) = h(a, u)$ diye tanımlanan eleman $\mathcal{C}$'ye A'da teğet doğruyu temsil eder; gösterin.
   (b h_a'yı bir matrisle bir vektörün çarpımı olarak yazın. Sonra bu (ifadeyi kullanarak) $h^T G h_a = 0$ eşitliğini sağlayacak tekil olmayan simetrik bir G matrisinin varlığını gösterin.
   (c) $\mathcal{C}$'nin *zarfı*, $\mathcal{C}$'ye teğet olan doğruların kümesi olarak tanımlanır. $\mathcal{C}$'nin zarfının eşlek kümesinin $P(V^*)$'da bir konik olduğunu gösterin.
   Böylece, bir koniğin, bir zarfın eşleği olduğunu bulduk.

3. Düzlemde üçer üçer eşdoğrusal olmayan beş noktadan bir ve yalnız bir pürüzsüz konik geçer. Bunu kullanarak, derecesi 5 olan cebirsel bir eğrinin yuvarlakları hakkında derslerde geliştirdiğimiz yöntemlerin yasaklayamadığı bir konumlamaya yasak getirin.