

Yerel olarak Öklit uzaylarına benzeyen özel topolojik uzaylar olan manifoldlar, bir geometricinin doğal çalışma uzaylarından biri. Bir manifoldda çalışmanın  $\mathbb{R}^n$ 'de çalışmaktan farkı, manifoldun yerel olmayan kimi özelliklerinin hesaplara girebilmesi. Dolayısıyla doğal bir merak, bir manifoldun topolojik ya da türevli topolojik yapısını ayırtetme gereçleri. Bu konuda M. Morse<sup>1</sup> ile başlayan modern fikirlerden biri şöyle: manifoldun üzerine bir yükseklik fonksiyonu koyuyoruz. Bu fonksiyonun olağan noktaları çevresinde çok fazla bilgi yok. Ama kritik noktaları çevresinde olabilir. Bu kritik noktaları *ehlileştirebilirsek*, fonksiyonun bu noktalar çevresindeki davranışından manifoldun özelliklerine ilişkin bilgi çıkarabiliriz. Nitekim, manifoldda reel değerli bir Morse fonksiyonu, manifoldun topolojisi hakkında *her şeyi* söyleyecek.

Derse, türev denen nesneye geometri gözlüğüyle bakarak başlıyoruz. Sonra türevli manifold ve üstünde türev alma hakkında konuşuyoruz. Bir fonksiyonun türevini alabilir, kritik noktalarına ve bunların indislerine bakabilir hale geliyoruz. Ders 3-5'te kritik noktalar çevresinde *iyi* davranmayı koşullara bağlayan Morse Önsavı'nı kanıtlıyoruz. Ders 6, herhangi bir fonksiyonu istenildiği kadar küçük bir dürtmeyle bu iyi davranan Morse fonksiyonlarından biri haline getirebileceğimizi gösteriyor. Bir Morse fonksiyonunun manifoldun topolojisine ilişkin ne söylediğini anlayabilmek için Ders 7'de türevli bir manifoldun teğet demetini, bu nesneyi kullanarak Ders 8'de vektör alanlarını, Ders 9'da bunların integrallerini (akış eğrilerini) tanıyoruz. Bir Morse fonksiyonu bir manifoldu kulplara ayırıyor. Son iki ders bunu anlamaya çalışıyoruz. Dersin sınırları elverdiğince örneklerle bakıyoruz.

Bu ders notları Ferit Öztürk'ün Matematik Köyünde verdiği iki haftalık bir dersin ardından, dersi izleyen Sina Türelî'nin notları yazmaya başlamasıyla ortaya çıktı. İki haftalık bu dersin amacı temel topoloji ve analiz bilgisine sahip lisans öğrencisini Morse kuramıyla tanıştırmaktı. Ders 12 gün sürdü. Bu notlar da 12 bölümden oluşuyor. Derste Morse kuramın temellerini vermeyi hedefledik ama yol boyunca birçok farklı cebirsel, geometrik gereç kullanıldığından bu gereçlerin çoğunu inşa etmek için yan yollara girdik çıktık.

Birkaç ana kaynağımız var. Türevli topoloji konusunda Milnor [Mil1], Guillemin-Polack [GiPo] ve Hirsch [Hirs], temel topolojide Munkres [Munk], manifoldlar konusunda Spivak [Spi1] ve [Spi2] sonlara doğru bir miktar cebirsel topolojide Hatcher [Hate] ve tabii ki Morse kuramında Matsumoto [Mats] ve Milnor [Mil2]. Son derslerde hızla geçtiğimiz konuların izinden düşük boyutlu topolojiye doğru kaymak isteyenler için o konuları derinlemesine çalışan bir kitap da Gompf-Stipsicz [GoSt]. Derslerin belki başında gerekli kaynakları anacağız. Sık sık referans vermeyeceğiz ama bilinmeli ki anlatılanların yukarıdaki listede mutlaka bir kaynağı var.

Bu metnin bir ders kitabı değil ders notu olduğu unutulmamalı. Dolayısıyla okuyucuyu aktif okumaya ve düşünmeye yönlendirmeye çalıştık. Derslerin akışı sırasında ortaya çıkan teknik boşlukları ve kenarda kalmış soruları alıştırmalar olarak bıraktık. Matematik Köyünde dersi izleyenler, gece yarısı problem saatleri yaptı, birlikte bu soruları çözdü. Çözümlerden bazılarını notların sonuna ekledik.

<sup>1</sup>Marston Morse, ABD'li matematikçi, 1892-1977

Tüm bunlarla birlikte bu notlar, lisans düzeyinde ya da erken yüksek lisans düzeyinde bir manifold, bir türevli topoloji ya da bir Morse kuramı dersinin -kaynağı olmasa da- rehberi olabilir.

Bu derslerin verilışı sırasında sınıfta dersi dikkatle dinleyen, sorular soran ve yanlışları düzelden katılımcılar olmasa bu notlar ortaya çıkamazdı. Elbette bu ders notları gelişmeye ve düzeltilmeye açık. Bunları kullanırken karşılaştığımız hataları iletmeniz notların kalitesini yükseltecektir.

Sina Türeli, Ferit Öztürk

## İçindekiler

<b>Ders 1: Önbilgiler</b>	<b>4</b>
1.1 Türev . . . . .	4
1.2 Kritik noktalar . . . . .	6
<b>Ders 2: Manifold, kritik noktaları ve indisleri</b>	<b>10</b>
2.1 Türevli manifold . . . . .	10
2.2 Türevli gönderimler, kritik noktaları, indisler . . . . .	12
<b>Ders 3: Morse Önsavı ve bir uygulaması</b>	<b>17</b>
3.1 Morse önsavı . . . . .	17
3.2 Bir uygulama: $S^2$ . . . . .	18
<b>Ders 4: Morse Önsavının kanıtı I</b>	<b>24</b>
4.1 Kenarlı manifold . . . . .	24
4.2 Morse Önsavının kanıtı için birkaç önsav . . . . .	26
<b>Ders 5: Morse Önsavının kanıtı II</b>	<b>28</b>
5.1 Kanıt . . . . .	28
5.2 Morse fonksiyonlarının varlığı ve çokluğu . . . . .	29
<b>Ders 6: Morse fonksiyonlarının yoğunluğu</b>	<b>31</b>
<b>Ders 7: Teğet demetleri</b>	<b>34</b>
7.1 Teğet vektör ve teğet demetinin cebirci inşası . . . . .	34
7.2 Fizikçi inşası . . . . .	35
7.3 Geometrici inşası . . . . .	35
<b>Ders 8: Gradyanımsı vektör alanları</b>	<b>38</b>
8.1 Arakesit ve vektör alanı . . . . .	38
8.2 Gradyanımsı . . . . .	39
<b>Ders 9: Akış eğrileri ve akış difeomorfileri</b>	<b>41</b>

<b>Ders 10: Kulplar</b>	<b>44</b>
10.1 Kulplara ayırma . . . . .	44
<b>Ders 11: Örnekler</b>	<b>47</b>
11.1 Kulplarla inşalar . . . . .	47
11.2 Yapıştırma örnekleri . . . . .	49
<b>Alıştırımalara yanıtlar</b>	<b>52</b>
<b>Kaynakça</b>	<b>59</b>

## Ders 1: Önbilgiler

Bu derste türev fonksiyonunun geometrik anlamını tartışıp, yalnız  $\mathbb{R}^n$ 'nin bir açık altkümesinde değil, daha genel uzaylarda tanımlı bir fonksiyonun türevi ve özel noktalarının nasıl olduğu konusunda sezgi geliştireceğiz. Burası için iyi bir kaynak [Spi2]'nin ilk sayfaları.

Şimdi, analiz altyapısı ve geometrik sezgiye dayanarak yapılan tartışmalardaki matematiksel boşluklar daha sonraki derslerde doldurulacak. Bu yüzden, ilk dersi okurken gelmekte olan kuramı hissetmeye çalışın. Boşluklar ileriki derslerde doldurulacak.

Eğer bir topolojik uzayın açık her örtüsünün, yine açık örtü olacak bir sonlu altörtüsü varsa bu topolojik uzaya *tıkız* diyoruz.

**Teorem 1.** *A tıkız bir topolojik uzay ve  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonunun  $A$ 'da minimum ve maksimum değerleri (ve  $A$ 'da bu değerlere ulaştığı noktalar) vardır.*

**Alıştırma 1.** *Teoremi kanıtlayın.*

**Teorem 2.** *A ve B iki topolojik uzay,  $f : A \rightarrow B$  sürekli bir fonksiyon olsun. A tıkızsa  $f(A)$  da tıkızdır. Eğer A bağlantılı bir uzaysa,  $f(A)$  da bağlantılı bir uzaydır.*

**Alıştırma 2.** *Teoremi kanıtlayın.*

### 1.1 Türev

Morse teorisi manifoldlar üzerinde tanımlanmış türevlenebilir fonksiyonlarla ilgilendir. Türevin bir operatör, bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin ise uygun vektör uzayları arasında doğrusal bir dönüşüm olarak benimsenmesi bizim için önem taşıyacak. Bu konuda önce birkaç örnek inceleyelim. Kullanılan kavramların iyi tanımlarını sonra konuşacağız.

**Örnek 1:** Kafaları karıştırmak için,  $\mathbb{R}_1$  ve  $\mathbb{R}_2$  diye iki topolojik uzay alalım, ikisi de aslında  $\mathbb{R}$ 'nin kopyaları olsun.  $f : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2, f(x) = x^2$  olarak tanımlanan fonksiyon süreklidir. Herhangi bir  $x_0 \in \mathbb{R}_1$  noktasında bu fonksiyonun türevinin  $2x_0$  olduğu söylenir. Fonksiyonun  $x_0$ 'daki Taylor açılımının ilk iki terimi  $f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  verir; yani  $x$  noktası  $x_0$ 'a yeterince yakinken  $f(x)$  bu iki terimin toplamı aracılığıyla istenenden daha iyi yakınlştırılabilir. Bu ifadedeki ikinci terimde türev ile  $x_0$ 'dan uzaklık çarpılıyor. Bu ne demek? Şöyle düşünelim:  $f(x)$  yaklaşık olarak  $f(x_0)$ 'dan  $(x - x_0)$  uzaklığının bir katı kadar değişiyor.  $x_0$ 'da  $x - x_0$  vektörü kadar gidersek görüntü bunun  $f'(x_0)$  katı bir vektör kadar değişiyor.

Bu gözlem bizi türevi bir fonksiyondan çok vektörler arası bir gönderim olarak görmeye zorluyor. Öncelikle,  $f$ 'nin  $x_0$ 'daki türevini  $Df(x_0)$  olarak göstereceğiz.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} Df(x_0) : T_{x_0}\mathbb{R}_1 &\rightarrow T_{f(x_0)}\mathbb{R}_2 \\ a &\mapsto 2x_0a \end{aligned}$$

olacak. Burada  $T_{x_0}\mathbb{R}_1$  ifadesi,  $x_0$  noktasındaki olası tüm vektörlerin uzayını anlatıyor. Bu uzaya  $\mathbb{R}_1$ 'in  $x_0$  noktasındaki *teğet uzayı* diyeceğiz. Bu durumda  $a$ ,  $\mathbb{R}_1$ 'in  $x_0$ 'daki teğet uzayından bir vektör,  $2x_0a$  ise  $\mathbb{R}_2$ 'nin  $f(x_0)$ 'daki teğet uzayından bir vektör oluyor.

Bu işlemi açık ama gereksiz bir şekilde yazarsak vektörlerimiz 1 boyutlu sütun vektörleri,  $Df(x_0)$  ise  $1 \times 1$  boyutlu bir matris olur:

$$[2x_0]_{1 \times 1} \cdot (a) = (2x_0a).$$

Burada *türev matrisini* köşeli parantez, vektörleri yuvarlak parantezle gösterdik ve  $\mathbb{R}$ 'deki standart tabanı kullanarak bunları yazdık.  $\square$

**Örnek 2:**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x + y^2$  sürekli bir fonksiyondur. Herhangi bir  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  noktasında  $f$ 'nin türevi

$$\begin{aligned} Df(x_0, y_0) : T_{x_0, y_0}\mathbb{R}^2 &\rightarrow T_{f(x_0, y_0)}\mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto [a + 2y_0b] \end{aligned}$$

olacak. İşlemi açık bir şekilde (ama artık gereksiz değil!) yazarsak

$$[1 \ 2y_0] \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + 2y_0b)$$

olur.  $\mathbb{R}^2$ 'nin  $(x_0, y_0)$  noktasındaki  $(a, b)$  hız vektörü,  $\mathbb{R}$ 'nin  $f(x_0, y_0)$  noktasındaki bir hız vektörüne gönderilmiş oldu.  $\square$

**Örnek 3:**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)) = (2xy, y + xz^2)$  gönderimi süreklidir. Bu gönderimin herhangi bir  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  noktasındaki türev dönüşümü

$$\begin{aligned} Df(x, y, z) : T_{(x, y, z)}\mathbb{R}^3 &\rightarrow T_{f(x, y, z)}\mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\mapsto (2ya + 2xb, z^2a + b + 2xzb) \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $\mathbb{R}_1^3$  ve  $\mathbb{R}_2^3$ 'ün standart tabanlarında bu ifade şöyle de yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ z^2 & 1 & 2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ya + 2xb \\ z^2a + b + 2xzb \end{pmatrix}.$$

Görüldüğü gibi şimdi  $f$ 'nin bir noktadaki türevi, 3 boyutlu bir vektör uzayından 2 boyutlu bir vektör uzayına doğrusal bir dönüşüm olarak çalışıyor.  $\square$

**Tanım 1.**  $\mathbb{R}^n$ 'de açık bir  $A$  kümesi için,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  sürekli bir gönderim olsun.  $O$  zaman  $p \in A$  noktasında  $f$ 'nin türevi  $Df(p)$  olarak gösterilir ve  $Df(p) :$

$T_p A \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^m$  olmak üzere iki teğet (vektör) uzayı arasında bir dönüşümdür. Kalkış ve varış teğet uzaylarında verilen tabanlara göre yazılmış matris gösterimine türev matrisi denir. Tabanların ne olduğu anlaşıldığı sürece bu matrise  $f$ 'nin  $p$ 'de türevi de diyeceğiz.

$f$ 'nin türevinin (türev matrisinin) rankının olası en yüksek  $\max(m, n)$  değere sahip olduğu durumda türeve tam rank denir. Türevin tam rank olmadığı noktalara kritik nokta denir. Herhangi bir kritik noktanın  $f$  altında görüntüsüneyse kritik değer denir.  $\square$

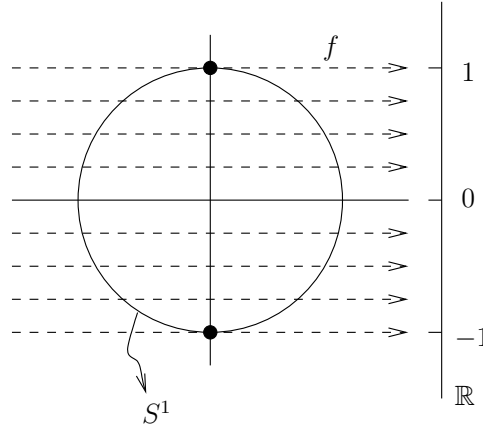
## 1.2 Kritik noktalar

Tanım gereği, kritik bir noktada fonksiyonun türevinin çekirdeği 0'dan farklı vektörleri de içerir. Birkaç örneğe daha bakalım.

**Örnek 4:**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3y$  sürekli fonksiyonunun türevi  $Df(x, y) = [0 \ 3]_{1 \times 2}$  olduğundan rankı her zaman 1'dir yani tam ranktır. Dolayısıyla  $f$ 'nin kritik noktası yoktur.  $\square$

**Örnek 5:** Kompleks yapıyla donatılmış düzlemde ( $\mathbb{C}$ ) birim çemberi  $S^1$  ile gösterip,  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}, e^{i\theta} \mapsto \sin \theta$  gönderimini düşünelim.

Bu gönderim,  $S^1$  üzerindeki bir noktayı ikinci bileşenine götüren bir *yükseklik fonksiyonudur*.  $S^1$  tıkHz olduğundan, Teorem 1 sayesinde  $f$ 'nin  $S^1$ 'de maksimum ve minimum değerlerini aldığı noktaların var olduğunu biliyoruz. Şekil 1'e bakacak olursak  $f$ 'nin maksimum noktasının  $(0, 1)$ , minimum noktasının  $(0, -1)$

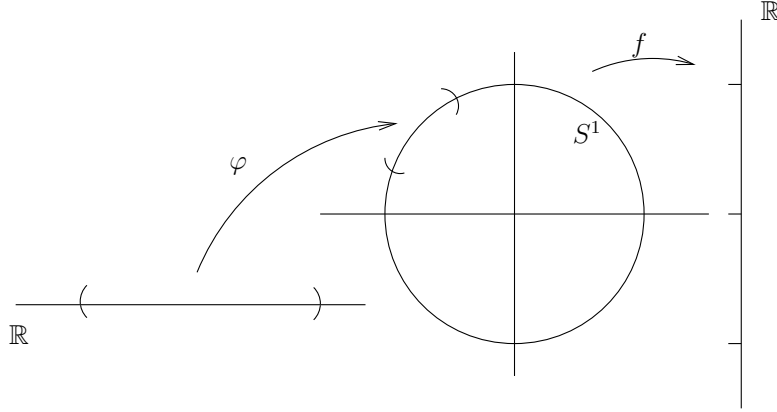


Şekil 1: Çemberde bir yükseklik fonksiyonu ve en az/fazla değerleri

olduğunu hissederiz.  $f$  gönderiminin *türevini* (tabii ki  $S^1$  üzerinde) alabilmeli ve bu iki noktayı kritik nokta olarak bulabilmeliyiz, en azından planımız bu. Ancak  $f$  gönderiminin kalkış kümesi  $\mathbb{R}^2$ 'de açık bir küme değil, tıkHz  $S^1$  kümesi.

Bu tür kümeler üzerinde türev almayı henüz bilmiyoruz. Şöyle yapalım:  $S^1$ 'i,  $\theta \in (0, 2\pi)$  olmak üzere  $\theta$  ile *parametrize* edelim:  $\theta \mapsto x_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in S^1 - \{(0, 1)\}$ . Yükseklik fonksiyonu şimdi  $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \sin \theta$  olarak çalışıyor. Dolayısıyla türevi  $[-\cos \theta]$ 'dir ve böylece kritik noktaları  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ve  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  olur. Bunlara karşılık gelen  $S^1$  noktaları da tam beklediğimiz gibi  $(0, 1)$  ve  $(0, -1)$  noktalarıdır. Tekrar edersek, bu örnekte kullanılan tek fonksiyon yükseklik fonksiyonu değil; zorunlu olarak  $S^1$  manifoldunu parametrize eden bir  $\varphi$  fonksiyonunu da kullandık. Böylece elde ettiğimiz  $f \circ \varphi$  bileşke fonksiyonu  $\mathbb{R}$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye,  $\theta \mapsto \sin \theta$  olarak çalıştı.  $\mathbb{R}$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye fonksiyonun türevini almasını bildiğimizden işi bitirdik<sup>2</sup>.  $\square$

Dolayısıyla aslında çember gibi *güzel* bir  $X \subset \mathbb{R}^n$  altuzayı ve üzerinde yeterince *güzel*, gerçel değerli bir  $f$  fonksiyonu varsa,  $f$ 'nin türevini almak için şu yola başvuruyoruz:  $X$ 'in herhangi bir  $p$  noktasının bir  $U \subset X$  komşuluğunda  $f$ 'nin türevini tanımlayabilmek için önce  $X$  veya en azından o komşuluğu, diyalim  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U$  ile, parametrize edebilmemiz gerekecek (bkz. Şekil 2). Bu tür  $X$  uzaylarına *manifold* diyeceğiz. O zaman bu iki fonksiyonun bileşkesi



Şekil 2: Çemberin bir parçasının parametrizasyonu

$f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  olacak ve  $p' = \varphi^{-1}(p) \in V$  noktasında türevi sanki

$$D(f \circ \varphi)(p') = Df(p) \circ D\varphi(p')$$

gibi bir zincir kuralını sağlayacak. Böylece aslında  $f$  fonksiyonunun  $X$ 'te kritik noktaları,  $f \circ \varphi$ 'nin kritik noktalarına karşılık gelecek. Aynı zamanda manifoldu inşa etmekte kullandığımız  $\varphi$  fonksiyonunun da tersi olan bir fonksiyon olmasını isteyeceğimizden,  $D\varphi(p')$  de tersi olan bir doğrusal dönüşüm olacak; tam rank olduğu için bu fonksiyondan herhangi bir kritik nokta katkısı gelmeyecek.

<sup>2</sup>Bir nokta hariç!  $\varphi$  parametrizasyonu  $(1, 0)$  noktasını ıskalıyor. Bunu daha sonra düşüneceğiz.

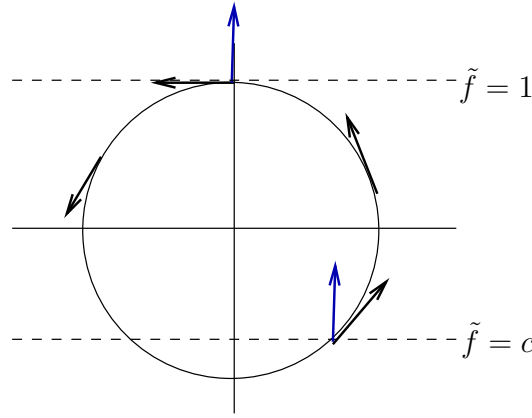
Bu tartışmaya ikinci derste daha derinlemesine gireceğiz. Şimdi Örnek 5'e dönüp bu örneği farklı bir bakış açısıyla inceleyelim.

Şekil 1'e yeniden bakalım. Kesikli çizgiler

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$$

fonksiyonunun eşdeğer (eşyüksekti) eğrileridir. Bu yeni  $\tilde{f}$  fonksiyonu  $S^1$ 'e kısıtlandığında aynen  $f$ 'yi verir:  $\tilde{f}|_{S^1} = f$ . Böyle bir  $\tilde{f}$  fonksiyonuna  $f$ 'nin bir genişletilmiş fonksiyonu diyeceğiz. Dikkat edilirse,  $f$ 'nin  $S^1$ 'de kritik noktaları,  $\tilde{f}$ 'nin eşdeğer eğrilerinin  $S^1$  manifolduna teğet olduğu noktalarımız gibi görünüyor. Bu durum aslında bu örneğe özel bir durum değildir. Bu özel olmayan durumu özel durumumuz için şöyle paketleyelim:

**Teorem 3.**  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun kritik noktaları tam da  $\mathbb{R}^2$ 'ye genişletilmiş  $\tilde{f}$ 'nin eşdeğer eğrilerinin  $S^1$ 'e teğet olduğu noktalardır.



Şekil 3: Yukarı doğru (mavi) vektörler  $\nabla \tilde{f}$ , diğerleri (siyah)  $S^1$ 'e teğet vektörler

*Kanıt:* Bir önceki sayfada kritik noktalarla ilgili tartışmaları bir an için doğru kabul edip devam edelim.  $f$ 'nin bir kritik noktasının  $p \in S^1$  olması demek,  $p' = \varphi^{-1}(p)$  için  $D(f \circ \varphi)(p') = 0$  demektir. Soldaki ifade  $D(\tilde{f} \circ \varphi)(p')$ 'ye eşittir.  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  olduğundan alışılmış zincir kuralını kullanarak

$$0 = D(\tilde{f} \circ \varphi)(p') = D\tilde{f}(p) \circ D\varphi(p')$$

bulunur. Örneğin bu ifadeye  $(1) \in T_{p'}\mathbb{R}$  vektörünü yedirirsek,

$$0 = D\tilde{f}(p) \circ D\varphi(p')(1) = \nabla \tilde{f}(p) \cdot D\varphi(p')(1)$$

bulunur. Son ifadenin 0'a eşit olması demek,  $\nabla \tilde{f}(p)$  (sıra) vektörüyle  $D\varphi(p')(1)$  (sütun) vektörünün birbirine dik olması demektir.  $\nabla \tilde{f}(p)$ ,  $\tilde{f}$ 'nin eşdeğer eğrilerine de diktir. Dolayısıyla  $p$  kritik noktaysa  $D\varphi(p')(1)$  vektörü eşdeğer eğrilere teğettir.



Bu vektör çemberin teğet uzayında yattığından, aslında çemberin teğet uzayı ile  $\tilde{f}$ 'nin eşdeğer eğrileri teğettir (bkz. Şekil 3). <sup>3</sup>  $\square$

Tamamen şekle ve analiz sezgimize güvenerek yaptığımız bu kanıtta kullandığımız yeni nesneyi tanımlayarak dersi bitiriyoruz:

**Tanım.**  $S^1$ 'in  $p$  noktasındaki *teğet uzay*, o nokta çevresinde çalışan bir  $\varphi$  parametrizasyonu ve  $p' = \varphi^{-1}(p)$  için

$$\{D\varphi(p')(v) : v \in T_{p'}\mathbb{R}\}$$

kümesidir. Bu kümeyi  $T_p S^1$  olarak göstereceğiz.  $\square$

---

<sup>3</sup>(1) vektörünü ilk denklem satırına yedirmeseydik, oradaki terimler birer doğrusal dönüşüm olarak kalacaklardı. Geometrik bir kavram olarak  $\mathbb{R}^2$ 'de diklik konusunda bir şey söyleyebilmek için, dönüşümü bir vektöre uygulayarak  $\mathbb{R}^2$ 'de bir vektöre çevirebildik.

## Ders 2: Manifold, kritik noktaları ve indisleri

Geçen ders kullandığımız terimleri düzgün bir biçimde tanımlayarak başlıyoruz. Bu ders için [Mil1] ve [Mats] izlenebilir.

### 2.1 Türevli manifold

**Tanım 2.** İki topolojik uzay arasında, sürekli, tersi olan ve tersi de sürekli bir gönderime homeomorfi denir.  $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir altkümesinden  $\mathbb{R}^m$ 'ye giden  $C^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) ve tersi de  $C^k$  bir gönderime  $C^k$  difeomorfi denir.  $C^\infty$  difeomorfiye gıcır difeomorfi diyeceğiz.  $\square$

Tanım gereği,  $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir altkümesinden  $\mathbb{R}^m$ 'ye giden bir difeomorfi bir homeomorfidir.

**Tanım 3.**  $M$  topolojik bir uzay,  $p$  herhangi bir noktası olsun.  $V$ ,  $\mathbb{R}^n$ 'de açık bir altuzay olmak üzere  $\varphi : V \rightarrow M$  gönderimi homeomorfiyse ve  $p \in \varphi(V)$  ise  $\varphi$ 'ye  $M$ 'nin  $p$  çevresinde bir parametrizasyonu denir (bkz. Şekil 4).

$M$  Hausdorff<sup>4</sup> ve ikinci sayılabilir<sup>5</sup> ise ve  $M$ 'nin her noktası çevresinde  $\mathbb{R}^n$ 'den kalkıp gelen bir parametrizasyon bulunabiliyorsa  $M$ 'ye  $n$  boyutlu topolojik manifold denir. Ya  $\text{boyut}(M) = n$  olarak yazacağız ya da  $M^n$  olarak göstereceğiz.

Tanımda topolojik uzay üzerine konulan ek koşullar, manifold üzerinde makul bazı teknik gereçlerin çalışabilmesi için gerekli. Bizim için en önemli manifold örnekleri, bir  $\mathbb{R}^K$  Öklit uzayında yatan, topolojisi oradan tetiklenen uzaylar olacak. Bu uzayların Hausdorff ve ikinci sayılabilir olduğuna, şu alıştırma sayesinde eminiz.

**Alıştırma 3.**  $\mathbb{R}^K$ 'nin herhangi bir alt uzayının Hausdorff ve ikinci sayılabilir olduğunu gösterin.

**Tanım 4.**  $M$  topolojik bir manifold olsun. Herhangi bir  $p \in M$  çevresinde çalışan herhangi iki parametrizasyon  $\varphi_1 : V_1 \rightarrow M$  ve  $\varphi_2 : V_2 \rightarrow M$  için

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(V_1) \subset V_2$$

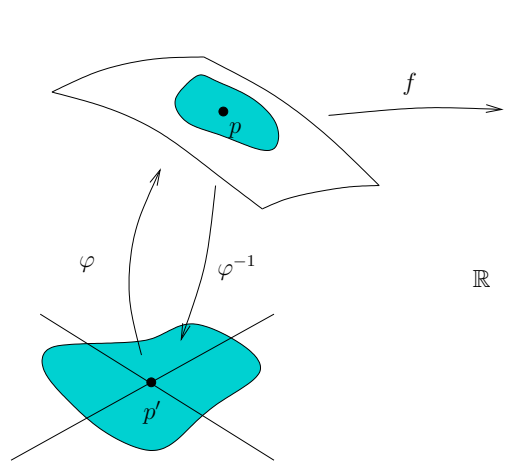
$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ 'de geçiş gönderimi diyeceğiz.  $M$  uzayının her noktasında her geçiş gönderimi difeomorfiyse  $M$ 'ye türevli manifold denir.

Geçiş gönderimlerinin  $C^k$  ya da gıcır olmasına göre  $M$ 'ye  $C^k$ -manifold ya da pürüzsüz manifold diyoruz.

$\Phi_1 = \varphi_1^{-1} : U_1 = \varphi_1(V_1) \rightarrow V_1$  gönderiminin varış kümesi  $\mathbb{R}^n$ 'de olduğundan,  $\Phi_1 = (x_1, \dots, x_n)$  şeklinde yazılabilir. Buradaki  $x_i : \varphi_1(V_1) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarına,  $p$  noktası çevresinde koordinat fonksiyonları,  $\Phi_1$  gönderimine de kimi zaman koordinat sistemi denir.  $(\Phi_1, U_1)$  ikilisine yama denir.

<sup>4</sup>Hausdorff topolojik uzay, herhangi farklı iki noktasının ayrı komşulukları olan uzaydır.

<sup>5</sup>İkinci sayılabilir topolojik uzay, "ikinci sayılabilirlik beliti"ni sağlayan uzaydır; yani topolojisinin sayılabilir bir tabanı vardır.



Şekil 4:  $M$  manifoldunun  $p$  noktasında  $\varphi$  ile parametrizasyonu

**Alıştırma 4.**  $C^0$ -manifoldun Tanım 3'deki gibi topolojik manifold olduğunu gösterin.

$M$  türevli bir manifold ve  $\varphi : V \rightarrow M$  gönderimi  $p$  noktası çevresinde bir parametrizasyon olsun. Bu manifold üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun  $p$  noktasındaki türevini

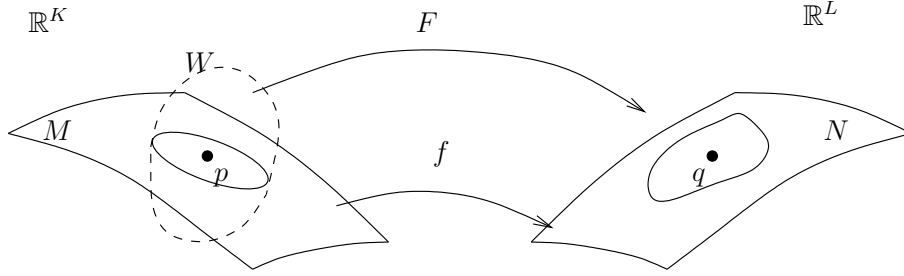
$$Df(p) = D(f \circ \varphi)(p'), \quad (\varphi(p') = p)$$

olarak yazınca doğru bir şey yapmamış gibi görünüyoruz çünkü bir kere, soldaki türev henüz tanımlı değil; ayrıca Ders 1'deki sezgimiz doğrultusunda gitsek bile, sağ ve soldaki türevlerin kalkış kümeleri farklı. Şu tanımın zamanı geldi:

**Tanım 5.**  $M$  türevli bir manifold,  $p \in M^m$  için,  $\varphi : V \rightarrow M$ ,  $p' \mapsto p$  bir parametrizasyon, ve  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  olsun. Eğer  $D(f \circ \varphi)(p')$  varsa, bu ifadeye  $f$ 'nin  $\varphi$  parametrizasyonunda  $p$  noktasındaki türevi diyeceğiz ve  $Df(p)$  olarak göstereceğiz (bkz. Şekil 4). Eğer  $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ ,  $V$ 'de bir koordinat tabanı seçmişse,  $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi)(p')$  kısmi türevini kimi zaman  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p')$  olarak da göstereceğiz.

Görüldüğü gibi, (soyut) bir türevli manifoldda türev tanımı parametrizasyona bağımlı. Yine de, Morse kuramında ilgileneceğimiz kavramlar parametrizasyondan bağımsız olacak. Bunlara geçmeden, türevli bir manifoldu başka bir biçimde yeniden tanımlayalım.

**Tanım 6.**  $M$  ve  $N$ , sırasıyla  $\mathbb{R}^K$ 'de ve  $\mathbb{R}^L$ 'de yatan birer topolojik manifold olsun. Yani  $M$  ve  $N$  hem manifold olsun hem de topolojileri, içinde buldukları uzayın topolojisinden tetiklensin.  $f : M \rightarrow N$  sürekli bir gönderim olsun. Eğer  $p \in M$  noktası çevresinde açık  $W \subset \mathbb{R}^K$  uzay ve  $F|_{W \cap M} = f$  olacak biçimde  $F : W \rightarrow N$  sürekli gönderimi bulunabiliyorsa  $F$  gönderimine  $p$  çevresinde  $f$ 'nin genişletmesi denir (bkz. Şekil 5).



Şekil 5:  $M$ 'den  $N$ 'ye  $f$  fonksiyonunun  $p$  noktası çevresinde genişletmesi

**Tanım 7.** (Türevli manifold, *tekrar*)  $M$  uzayı  $\mathbb{R}^K$  'nin içinde topolojik bir manifold olsun.  $M$  'nin her bir  $p$  noktasında çalışan her bir parametrizasyonunun tersi,  $p$  çevresinde  $\mathbb{R}^K$  'nin bir açık kümesine türevlenebilir ( $C^k$ , gıcır vs.) bir biçimde genişletilebiliyorsa  $M$  'ye türevli ( $C^k$ -, pürüzsüz vs.) manifold denir.

Bu durumda  $M$  'ye  $\mathbb{R}^K$  'nin bir altmanifoldu ya da  $\mathbb{R}^K$  'ye gömülmüş diyoruz.

Bu tanım daha önce yaptığımız tanıma denktir. Eğer bir  $M \subset \mathbb{R}^K$  uzayı Tanım 7'yi sağlıyorsa,  $p$  noktasında herhangi  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  parametrizasyonları ve genişletilmiş tersleri  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  için,  $\Phi_2 \circ \varphi_1$  ve  $\Phi_1 \circ \varphi_2$  geçiş gönderimleri türevlenebilir ( $C^1$  vs.) olur. Üstelik bu iki gönderim birbirinin tersidir. Dolayısıyla geçiş gönderimleri tam da Tanım 4'ün istediği gibi difeomorfi olur.

Tanım 4'ün Tanım 7'yi gerektirmesiyle derin bir teorem aracılığıyla sağlanır. Whitney Gömme Teoremi denen bu teorem, Tanım 4'ü sağlayan her türevli manifoldun, türevli yapısıyla birlikte bir  $\mathbb{R}^K$  'ye gömülebileceğini garanti eder (bkz. örneğin [Hirs]).

## 2.2 Türevli gönderimler, kritik noktaları, indisler

**Teorem 4.** İki türevli manifold arasında bir fonksiyon bir noktada bir parametrizasyona göre türevliyse, o noktada her parametrizasyon için türevlidir.

*Kanıt:*  $f : M \rightarrow N$  gönderimi,  $p \in M$  noktasında  $\varphi_1$  parametrizasyonunda türevlenebilir olsun.  $p$  çevresinde herhangi bir  $\varphi_2$  parametrizasyonu için:

$$\begin{aligned} Df(p) &= D(f \circ \varphi_1)(p_1) &= D(f \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(p_1) \\ & &= D(f \circ \varphi_2 \circ \Phi_2 \circ \varphi_1)(p_1) \\ & &= D(f \circ \varphi_2)(p_2) \circ D(\Phi_2 \circ \varphi_1)(p_1) \end{aligned}$$

buluruz. Buradaki ilk eşitlik tanımın kendisiydi. İkinci satıra geçerken  $\varphi_2$  'nin bir  $\Phi_2$  genişletmesinin var olduğunu Tanım 7'den söyledik. Son satıra bilindik zincir kuralıyla geçebildik.  $\Phi_2 \circ \varphi_1$ , manifold tanımı gereği bir difeomorfi olduğundan,

$$D(f \circ \varphi_2)(p_2) = (D(\Phi_2 \circ \varphi_1)(p_1))^{-1} \circ D(f \circ \varphi_1)(p_1)$$

elde ederiz. Sağ taraf tanımlıdır. Dolayısıyla  $f$ ,  $\varphi_2$  parametrizasyonunda da türevlidir.  $\square$

**Alıştırma 5.** *Manifoldlar arası gönderimler için bir zincir kuralı yazın ve kanıtlayın (Aşağıdaki tanıma bakabilirsiniz).*

İlk derste Tanım 1'de iki Öklit uzayı arasında bir fonksiyon için kritik noktayı tanımlamıştık. Şimdi bu tanımları genişletelim:

**Tanım 8.**  $M^m$  ve  $N^n$  türevli iki manifold,  $f : M \rightarrow N$  sürekli bir gönderim olsun.  $f, p \in M$  noktasında bir parametrizasyona göre türevliyse,  $f$ 'ye  $p$ 'de türevli bir gönderim denir.  $f$ 'nin türevinin rankının olası en yüksek  $\max(m, n)$  değerine sahip olduğu durumda türeğe tam rank denir. Türevin tam rank olmadığı noktalara kritik nokta denir. Herhangi bir kritik noktanın  $f$  altında görüntüsüneyse kritik değer denir.

Bu tanımda bir şey eksik:  $f$ 'nin türevinin kalkış ve varış kümelerini yazmadık! Bu kümeler, manifoldların o noktadaki *teğet uzayları* olacak. Bu uzayların tanım ve inşasına 7. Ders'te değineceğiz.

Tanımda  $f$ 'nin türevliliği, parametrizasyondan bağımsız olarak tanımlı (Teorem 4). Ancak tam rank olmanın ve kritik noktaların parametrizasyondan bağımsız oldukları belli değil. Şu teorem bu işi çözecek:

**Teorem 5.**  $f : M \rightarrow N$  türevli gönderiminin bir noktada tam rank olup olması, parametrizasyondan bağımsızdır.

*Kanıt:*  $\varphi_1$  ve  $\varphi_2$  bir noktada iki parametrizasyon olsun.  $D(f \circ \varphi_1) = D(f \circ \varphi_2) \circ D(\varphi_2 \circ h_1)$  idi.  $D(\varphi_2 \circ h_1)$  difeomorfi olduğundan tam ranktır. Dolayısıyla,  $f$ 'nin  $\varphi_2$ 'ye göre rankı,  $\varphi_1$ 'e göre rankına eşittir.  $\square$

**Tanım 9.**  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $p$  kritik bir noktası olsun. Eğer  $f$ 'nin  $p$  noktasında  $\varphi$  parametrizasyonunda Hessian matrisi, yani  $(f \circ \varphi)$ 'nin ikinci türev matrisi, tekilse  $p$ 'ye dejenere kritik nokta, eğer tekil değilse dejenere olmayan kritik nokta denir.

*Dejenere olmayan bir kritik noktanın indisi, Hessian matrisinin o noktadaki negatif özdeğerlerinin sayısıdır.*

Hessian matrisi, simetrik ve gerçel girdili bir matris olduğu için köşegenleştirilebilir. Bu sayede bir kritik noktanın indisi, köşegenleştirilmiş Hessian matrisinin negatif girdilerinin sayısıdır.

**Alıştırma 6.** *Her simetrik ve gerçel girdili matrisin köşegen haline getirilebileceğini kanıtlayın.*

**Örnek.**  $\mathbb{R}^3$ 'te birim küre ( $S^2$ ) üzerinde tanımlanmış bir yükseklik fonksiyonunun kritik noktalarını ve indislerini bulalım.

Yapılması gereken, küre için parametrizasyonlar ve bir yükseklik fonksiyonu tanımlamak. Yükseklik fonksiyonu basitçe

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto z$$

olsun. Olası bir parametrizasyon,  $\mathbb{R}^2$ 'de birim daireyi üst yarım ve alt yarım kürelere çıkarmak. Daha kolay bir parametrizasyon küresel koordinatları kullanarak  $\theta$  ve  $\varphi$  açıları ile parametrize etmek olabilir. Her parametrizasyonun, kürenin bazı noktalarını ıskaladığına dikkat edin.

Bu örnekte yarım küreleri daireyle parametrize edeceğiz. Diğer parametrizasyonları alıştırma olarak bırakıyoruz.

Önce  $\varphi_{\pm} : D^2 \rightarrow S^2, (x, y) \mapsto (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})$  parametrizasyonunu alalım. Bunlardan  $\varphi_+$ , daireden noktaları alıp üst yarım küreye izcıkımını yapıyor. Bu durumda,

$$f \circ \varphi_+ : D^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$$

ve

$$D(f \circ \varphi_+)(x, y) = \left[ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right]_{1 \times 2}$$

olur. Bu matrisin tam rank olmadığı durumda iki girdisinin de 0 olması gerekiyor; bu da  $-x = 0, -y = 0$  olması demektir. Dolayısıyla üst yarım kürede tek kritik nokta,  $(0, 0, 1)$  noktasıdır. Şimdi bu noktada Hessian matrisini hesaplayalım:

$$H(f \circ \varphi_+)(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} & \frac{-yx}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} \\ \frac{-yx}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} & \frac{y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla bu nokta dejenere değildir ve indisi 2'dir. Aynı hesapları  $\varphi_-$  için de yaparsak dejenere olmayan  $(0, 0, -1)$  kritik noktasını buluruz. Bu noktanın indisiyse 0'dır. Küreyi tamamen kaplayacak biçimde başka parametrizasyonlar seçilirse ve bu iki noktadan başka kritik nokta çıkmayacaktır.

**Alıştırma 7.** Güney kutbunun indisinin 0 olduğunu gösterin.  $\varphi_{\pm}$  parametrizasyonları, kürenin hangi noktalarını ıskalıyor?  $\varphi_{\pm}$ 'ye öyle parametrizasyonlar ekleyin ki ıskalanan noktalar da kaplansın.

□

**Alıştırma 8.** Yukardaki hesapları, küreyi küresel koordinatlarla parametrize ederek yapın.

Görüldüğü üzere her kritik nokta için bir indis hesaplamış olduk. Bu hesap için fiziksel bir modelimiz var. Bir kürenin tam tepesinin biraz yanına bir damla su bıraktığımız zaman (tam tepesine değil ama) bu damla aşağıya doğru akmaya başlar. Tanımsal olarak bir cisim üzerindeki kuvvet, o cismin tabi olduğu  $U$  potansiyel fonksiyonunun eksi gradyanıdır, yani  $F = -\nabla U$ . Küre üzerindeki bir damlacığın potansiyel enerjisi yerden olan uzaklığı ile orantılıdır (aşlında ağırlık çarpı yükseklik çarpı yer çekimi ivmesine eşittir tam olarak). Dolayısıyla damlacık, bu yükseklik fonksiyonunun eksi gradyanının belirlediği yönde akacak. Küre üzerindeki herhangi bir noktada yükseklik fonksiyonunun gradyanı küreye teğet bir vektör verecek ve bu vektörler de ordan geçmekte olan bir damlacığın ne tarafa doğru hareket etmeye devam edeceğini gösterecek. Aşlında bu damlacığın izlediği yol ve bu vektörler, damlacığın tabi olduğu bir diferansiyel denklemin çözümünü oluşturan faz eğrilerini tarif etmektedir. Bir kritik noktanın indisiyse, bir parametrizasyona göre bir faz eğrisinin kritik noktaya

yaklaşan bir hareketi mi, yoksa kritik noktadan uzaklaşan bir hareketi mi tarif ettiğini gösterir. Örneğin kuzey kutbunun indisinin 2 olması, o civardaki akış eğrilerinin hepsinin o noktadan uzağa doğru gittiğini gösterir; bu nokta yerel tepedir. Güney kutbunun 0 indisi, civarındaki faz eğrilerinin hepsinin o noktaya doğru aktığını anlatır; bu nokta yerel çukurdur. Eğer bir noktanın bir indisi artı bir indisi eksi olsaydı bu bir eyer noktaya denk gelecekti.

Gelelim Morse kuramını başlatan teoreme:

**Teorem 6.** *Bir kritik noktanın dejenere olması ve indisi, parametrizasyondan bağımsızdır.*

**Kanıt:**  $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$  türevli bir fonksiyon,  $x = (x_1, \dots, x_n) : U_1 \rightarrow M$  ve  $y = (y_1, \dots, y_n) : U_2 \rightarrow M$ ,  $p \in M$  noktası çevresinde iki parametrizasyon olsun. Burada  $x_i$  ve  $y_i$  fonksiyonları, Tanım 4'de olduğu gibi,  $x$  ve  $y$  parametrizasyonlarının koordinat fonksiyonları. Ayrıca,  $p_1 = x^{-1}(p)$  ve  $p_2 = y^{-1}(p)$  olsun.

Bu durumda,  $f$  fonksiyonunun  $x$  parametrizasyonuna göre Hessian matrisi  $\overset{x}{H}f(p) = \overset{x}{H}(f \circ x)(p_1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (f \circ x) \right)_{i,j}$  olacak. Burada  $H$ 'nin üstüne  $x$  koyarak parametrizasyon alemimizi aklımızda tutuyoruz. Şimdi Hessian matrisinin  $(i, j)$  girdisini  $y$  için yazalım:

$$\begin{aligned} (\overset{y}{H}(p_2))_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (f \circ y)(p_2) = \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\ &= \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\ &= \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \sum_k \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_l \partial y_j} \right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\ &= [J_{y \rightarrow x}^T \overset{x}{H}(p_1) J_{y \rightarrow x}]_{ij} \end{aligned}$$

Burda  $J$  matrisi,  $y$  aleminden  $x$  alemine  $p_2$  noktasında koordinat dönüşüm matrisini ifade ediyor. Bu durumda  $\overset{y}{H}f(p_2)_{ij}$  tam ranksa  $\overset{x}{H}f(p_1)_{ij}$  de tam rankdır. Ayrıca iki matrisin indisleri de eşittir.

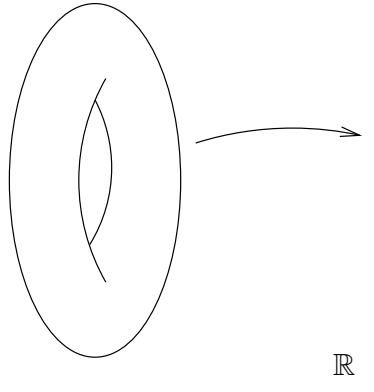
**Alıştırma 9.**  $A, B$  ve  $S$ ,  $m \times m$  matrisler olsun ve  $S$  tekil olmasın.  $A = S^T B S$  ise  $A$  ve  $B$ 'nin negatif özdeğer sayılarının birbirlerine eşit olduğunu gösterin. □

**Tanım 10.**  $M$  bir manifold,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  türevli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ 'nin hiçbir dejenere kritik noktası yoksa bu fonksiyona Morse fonksiyonu denir.

Gelecek derslerde Morse fonksiyonlarının birçok ilginç özelliğini göreceğiz. Hatta bir Morse fonksiyonunda manifoldun türevli topolojik bilgisinin gizli olduğunu göreceğiz.

Dersi tanıdık bir yüzeyle ilgili bir alıştırma ile bitirelim.

**Alıştırma 10.** Aşağıdaki 2 boyutlu simit (torus) için parametrizasyonlar belirleyip gösterilen malum yükseklik fonksiyonu için kritik noktaları ve bunların indislerini bulun.



Şekil 6: Simit, 2 boyutlu bir manifold.



## Ders 3: Morse Önsavı ve bir uygulaması

Bu derste Morse Önsavını ortaya atıp bunu kullanarak  $S^1$ 'e ilişkin bir uygulama yapacağız. Burada kaynak olarak [Mats] ve [GuPo] izlenebilir.

### 3.1 Morse önsavı

$\mathbb{R}$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye türevli bir fonksiyonun türevi bir noktada sıfır değilse o nokta civarında fonksiyonun tersi vardır. Bunu söyleyen teorem *Ters Fonksiyon Teoremi*. Bu teorem aslında daha geneline söyler:  $\mathbb{R}^n$ 'den  $\mathbb{R}^n$ 'ye bir  $C^k$ -gönderimin bir noktadaki türevi tekil değilse, o nokta çevresinde gönderim bir  $C^k$ -difeomorfidir.

Türevin tekil olduğu noktalarda, yani kritik noktalarda, Ters Fonksiyon Teoremi bir şey söyleyemez. Yine de, bir kritik nokta dejenere değilse, o noktanın bir komşuluğunda fonksiyon *güzel* davranır. Bunu söyleyen, Morse Önsavı'dır.

**Teorem 7. (Morse Önsavı)** *M bir m-manifold,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  türevlenebilir bir fonksiyon ve  $p_0 \in M$  noktası f'nin dejenere olmayan bir kritik noktası olsun. Bu durumda  $p_0$  çevresinde bir komşulukta öyle  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  koordinatları ve öyle bir k tamsayısı ( $0 \leq k \leq m$ ) vardır ki bu komşuluktaki her p noktası için*

$$f(p) = f(p_0) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \dots + x_m^2$$

olarak ifade edilir.

Dikkatle bakarsanız,  $f(p)$ 'nin ifadesinde bir notasyon karmaşası olduğunu görürsünüz. O satırda  $p$  ve  $p_0$  manifoldda, oysa  $x_i$ 'ler  $\mathbb{R}^n$ 'de. Böyle bir ifadeye  $p$  ve  $p_0$  yazarken kastettiğimiz, bu noktaların parametrizasyon altında aşağıda,  $\mathbb{R}^n$ 'de görüntüsü.

Bu teoremden manifoldda koordinatların tanımlandığı açık bölgeye *Morse komşuluğu*, buradaki koordinatlara *Morse koordinatları* diyeceğiz.  $f$  fonksiyonu Morse ise, teorem sayesinde  $f$ 'nin herbir kritik noktası çevresinde bir Morse komşuluğu bulabiliriz. Morse Önsavının kanıtını sonra vereceğiz.

Morse Önsavına göre örneğin dejenere olmayan kritik bir  $p_0$  noktasında, eğer  $k = 0$  ise bütün terimlerin başındaki işaretler artı olacak ve dolayısıyla  $p_0$  noktası,  $f$  fonksiyonunun  $M$  üzerinde bir yerel çukuru olacak. Dinamik sistem bakış açısından,  $p_0$  noktası civarında bırakılan su damlacıkları yükseklik fonksiyonunun azalan yönünde hep  $p_0$  noktasına doğru kayacak. Eğer  $k$  sıfırdan farklıysa, ilk  $k$  yönde su damlacığı yükseklik fonksiyonunun azalan yönünde noktadan uzaklaşacak, diğer yönlerde noktaya yaklaşacak.

Morse Önsavını izleyen bazı sonuçları kanıtlayalım.

**Sonuç 8.** *Morse önsavında k sayısı f fonksiyonunun  $p_0$ 'daki indisine eşittir.*

*Kanıt:* İndisleri bulmak için Hessian matrisini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

**Sonuç 9.**  $M$  üzerinde tanımlı bir Morse fonksiyonunun her bir kritik noktası yalıtılmıştır.

*Kanıt:*  $p_1$  ve  $p_0$ ,  $f$ 'nin iki kritik noktası olsun.  $p_1$ ,  $p_0$  çevresinde bir Morse komşuluğunun içinde olsun ve Morse koordinatlarında  $(x_1, \dots, x_n)$  olarak verilsin. O zaman, Morse Önsavına göre

$$f(p_1) = f(p_0) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \dots + x_n^2$$

olacak. Öte yandan,  $p_1$  bir kritik nokta olduğu için  $f$ 'nin bu noktadaki türevi sıfır olmalı. Yani:

$$f_j(p_1) = \pm 2x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

(Burada  $j \leq k$  ise işaret  $-$  diğer durumda  $+$ ). Dolayısıyla  $x_1, \dots, x_n = 0$  olmalı. Parametrizasyon birebir olduğundan,  $p_1 = p_0$  olmak zorunda kalır. □

**Alıştırma 11.** *Tıkız bir manifold üzerinde bir Morse fonksiyonunun sonlu sayıda kritik noktası vardır; gösterin. Ne tür tıkız topolojik uzaylarda yalıtılmış noktalar sonlu sayıda olmak zorunda? Araştırın.*

### 3.2 Bir uygulama: $S^2$

Şimdi Morse Lemma kullanarak (sadece onu değil tabi) türevli topolojide önemli bir teorem kanıtlayalım. Kenarı olmayan ve tıkız bir manifoldta *kapalı* diyoruz. Manifoldları şu ana kadar zaten kenarsız tanımlamıştık. Manifold kenarını Ders 3.2'te tanımlayacağız.

**Teorem 10.**  *$M$  kapalı (tıkız ve kenarsız) bir 2-manifold ve  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tam iki kritik noktası olan bir Morse fonksiyonu olsun. Bu durumda  $M$ ,  $S^2$ 'ye difeomorftur.*

*Kanıt:* Kanıt bu bölümün sonuna kadar sürecek. Yapılacak olan şey kısaca kritik noktaların etrafında Morse komşuluklarını kullanarak dairesel bölgeler

tanımlamak ve bu bölgelerin birbirine *yapıştırılmasıyla* manifoldun inşa edildiğini göstermek. İspatlayacağız ki bu dikiş sonucu ortaya çıkan topolojik uzay  $S^2$ 'ye difeomorftur.

$f$  tıkız bir manifold üzerinde tanımlı bir fonksiyon olduğu için minimum ve maksimum değer aldığı noktalar vardır (Teorem 1). Ayrıca bu noktalarda  $f$ 'nin türevi sıfır olması gerektiği için bu noktalar teoremden verilen minimum ( $p_0$ ) ve maksimum ( $p_1$ ) noktalar olacaktır. Dolayısıyla  $M$ 'nin bir 2-manifold olduğu bilgisi ve Morse Önsavını kullanarak aldığımız (sırasıyla)  $V_0$  ve  $V_1$  Morse komşuluklarında  $f$  fonksiyonu sırasıyla  $f(p_0) - x_1^2 - x_2^2$  ve  $f(p_1) + x_1^2 + x_2^2$  olarak ifade edilecek. Şimdi bu komşuluklarda birer alt bölge tanımlayalım:

$$U_0 \doteq \{p \in M : f(p_0) \leq f(p) \leq f(p_0) + \varepsilon\} \subset V_0;$$

$$U_1 \doteq \{p \in M : f(p_1) \geq f(p) \geq f(p_1) - \varepsilon\} \subset V_1.$$

Bu durumda,

$$U_0 \cong \{p \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(p) - f(p_0) = x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\};$$

$$U_1 \cong \{p \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(p_1) - f(p) = x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\}$$

olur ki böylece  $U_0$  ve  $U_1$ 'in birer daireye difeomorf olduğunu görmüş olduk.

Demek ki, indisi 2 ve 0 olan iki kritik nokta etrafında *biri yukarı diğer aşağı bakan* iki tane disk varmış (yukarı ve aşağı sözcükleri aslında soyut bir manifold için bir şey ifade etmiyor). Burdan devam etmek için kanıtı sonra verilecek bir teorem kullanacağız.

**Teorem 11.**  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  bir Morse fonksiyonu olsun.  $a < b$  olmak üzere  $a, b \in \mathbb{R}$  değerleri  $f$ 'nin olağan (kritik olmayan) iki değeri olsun. Ayrıca  $a$  ile  $b$  arasında başka hiçbir kritik değer olmasın. Bu durumda  $X_a \doteq f^{-1}(a)$  ve  $X_b \doteq f^{-1}(b)$  kümeleri difeomorftur ve  $f^{-1}([a, b])$  altuzay  $X_a \times [a, b]$  uzayına difeomorftur.

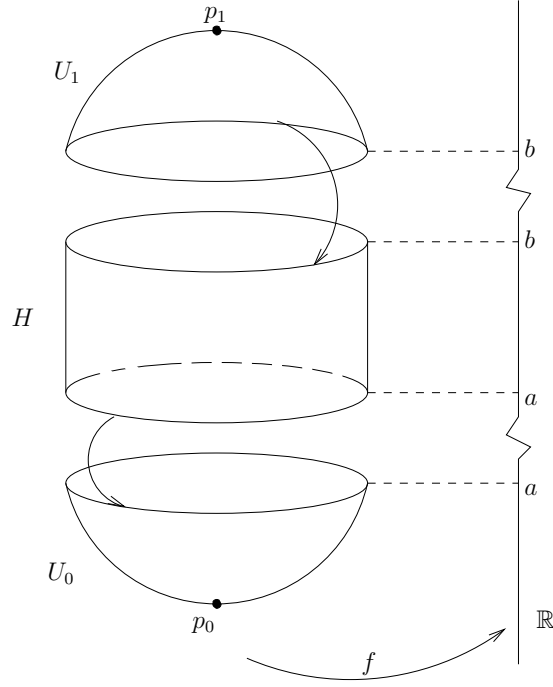
Bizim durumumuzda  $a = f(p_0) + \varepsilon$  ve  $b = f(p_1) - \varepsilon$  seçersek,  $X_a$  ve  $X_b$  sırasıyla  $U_0$  ve  $U_1$ 'in kenar çemberleri olacak. Teorem 11 bunlarını birbirine difeomorf olduğunu (ki bariz) ve  $H = M - (\text{iç}(X_a) \cup \text{iç}(X_b))$  uzayının  $X_a \times [a, b]$  silindire difeomorf olduğunu söylüyor (Burada iç diyerek bir topolojik uzayın iç kümesini kastediyoruz).

Şu an elimizde üç soyut uzay var: iki tane daire ve bir çembersel silindir. Bu uzaylar *kenarlarından yapıştırılarak* başta verilen  $M$  manifoldu elde edilmiş (Şekil 7). Bu uzayların nasıl yapıldığını bilmiyoruz. Bunların birbirine yapıştırılıp küre yapılabileceğini göstermek için önce yapıştırmak diyerek ne demek istediğimizi tanımlayalım:

**Tanım 11.**  $X$  ve  $Y$  iki topolojik uzay,  $A \subset X$  bir altuzay,  $g : A \rightarrow Y$  sürekli bir gönderim olsun.  $X \amalg Y$  ayrık birleşim uzay üzerinde,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  olmak üzere

$$x \sim x, y \sim y, x \sim y \Leftrightarrow y = g(x)$$

olarak tanımlanan  $\sim$  denklik bağıntısını düşünelim.  $Z$  kümesi bu bağıntının denklik sınıflarının kümesi,  $h : X \amalg Y \rightarrow Z$  gönderimiye herbir noktayı ait olduğu



Şekil 7:  $M$  manifoldu 3 parçanın yapıştırılmasıyla oluşuyor.

denklik sınıfına götüren örten izdüşüm gönderimi olsun.  $Z$  üzerinde şöyle bir topoloji tanımlayalım:

$U \subset Z$  açık kümedir ancak ve ancak  $h^{-1}(U) = X \amalg Y$ 'de açık ise.

Böyle tanımlanmış topolojiye bölüm topolojisi denir.  $Z$  topolojik uzayına  $X \amalg Y$ 'nin bölüm uzayı, ya da  $X$  ile  $Y$ 'nin  $g$  gönderimiyle birbirine yapıştırılması denir.  $X \cup_g Y$  olarak gösterilir.  $h$  gönderimine bölüm gönderimi denir.

**Alıştırma 12.** (Yukarıdaki ve buradaki topolojik tanımlar için örneğin Munkres'e başvurun [Munk].)

(a) Tanımda  $Z$ 'ye verilen topolojiyle şöyle verilen topolojinin aynı olduğunu kanıtlayın:

$U \subset Z$  kapalıdır ancak ve ancak  $h^{-1}(U) = X \amalg Y$ 'de kapalı ise.

(b) Hangisi daha fazla şey istiyor:  $Z$ 'ye  $g$ 'yi sürekli yapacak en basit topolojiyi koymak mı,  $g$ 'yi bölüm gönderimi yapacak yukarıdaki topolojiyi koymak mı?

(c) Her örten açık (ya da kapalı) gönderimin bölüm gönderimi olduğunu kanıtlayın. Her bölüm gönderimi açık (ya da kapalı) mıdır?

Şimdi kanıtımıza devam edebilmek için türevli topolojiden gelen bir kaç yapıştırma teoremi kullanmamız gerekecek (kanıt için bkz. örneğin [GiPo] ya

da [Hirs]). Teoremlerde artık bir manifoldun kenarı kavramını kullanmamız gerekiyor. Daire ya da silindir için şöyle böyle ne kastedildiği açık. Tanımları gelecek derse erteliyoruz.

**Teorem 12.**  $X$  ve  $Y$  pürüzsüz  $n$ -manifoldlar olsun.  $X$ 'in kenarının ( $\partial X$ ) bağlantılı bir parçasından  $Y$ 'nin kenarının bağlantılı bir parçasına ( $\partial Y$ ) gıvr  $g$  difeomorfisi verilsin.  $X$  ile  $Y$ 'nin  $g$  gönderimiyle birbirine yapıştırılmasıyla elde edilen uzay da pürüzsüz bir manifolddur.

Sokaktaki insan diliyle söyleyelim: iki manifoldu kenarlarından bir difeomorfiyle yapıştırırsak, yani o gönderim altında birbirine giden noktaları özdeşleştirip tek nokta gibi görürsek çıkan uzay da pürüzsüz. Bu teorem sürekli ya da  $C^k$  kategorilerinde de yazılabilirdi.

**Teorem 13.**  $X_1, X_2, Y_1$  ve  $Y_2$  pürüzsüz manifoldlar;  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow X_2$ ,  $\varphi_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$ ,  $g_1 : \partial X_1 \rightarrow \partial Y_1$ ,  $g_2 : \partial X_2 \rightarrow \partial Y_2$  difeomorfiler olsun. Eğer  $g_2 \circ \varphi_1|_{\partial X_1} = \varphi_2|_{\partial Y_1} \circ g_1$  sağlanıyorsa yani

$$\begin{array}{ccc} \partial X_1 & \xrightarrow{\varphi_1|_{\partial X_1}} & \partial X_2 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ \partial Y_1 & \xrightarrow{\varphi_2|_{\partial Y_1}} & \partial Y_2 \end{array}$$

diyagramı değişmeliyse o zaman

$$X_1 \cup_{g_1} Y_1 \cong X_2 \cup_{g_2} Y_2$$

olur.

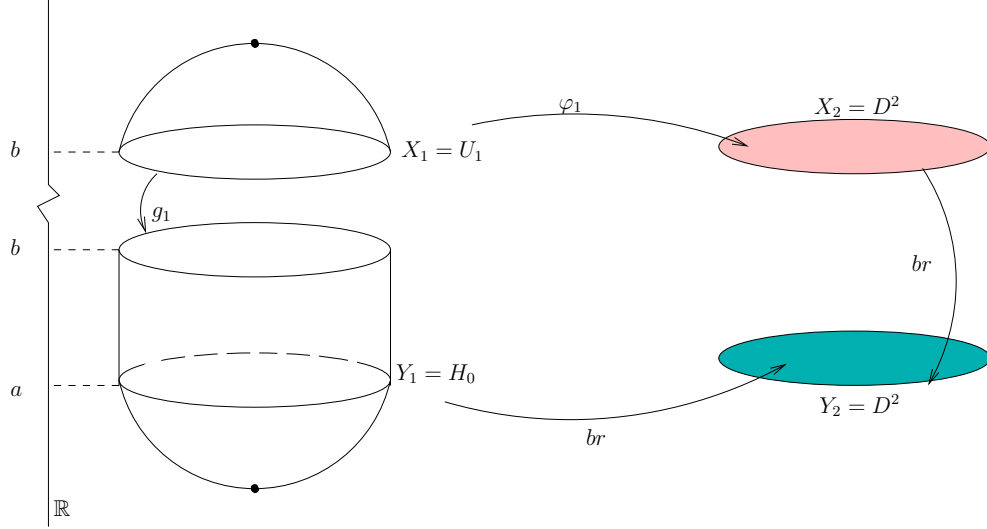
Yani, kenarlarından yapışacak manifoldlar yerine bunlara difeomorf başka manifoldları yapıştırırsak, yapıştırma gönderimini de yukarıdaki koşulu sağlamak üzere istediğimiz gibi değiştirirsek, yapışma manifoldun difeomorfi sınıfı değişmez.

Teorem 10'in kanıtına geri dönelim.  $U_0$  ve  $U_1$  diye iki dairemiz ve  $H$  diye bir çembersel silindirimiz vardı. Şu bariz iddiayı alıştırma olarak bırakalım:

**Alıştırma 13.**  $U_0$ 'in kenarı ile  $H$ 'nin bir kenarından bir difeomorfiyle birbirine yapıştırılması sonucu ortaya çıkan kenarlı manifoldun daireye difeomorf olduğunu kanıtlayın.

Alıştırmada çıkan daireye  $H_0$  diyelim. Şimdiki savımız  $H_0$  ile  $U_1$  daireleri kenarlarından yapıştırıldığında çıkan manifoldun aynen  $\mathbb{R}^3$ 'teki iki daireyi yapıştırmak gibi küre olduğu (Şekil 8).

Teorem 13'ü kullanacağız. Teoremdaki  $X_1 = U_1$ ,  $Y_1 = H_0$  olsun.  $X_2$  ve  $Y_2$  de birim daire  $D^2$  olsun. Problemin içinde bilmediğimiz bir  $g_1 : \partial X_1 \rightarrow \partial Y_1$  var.



Şekil 8: İki daire kenarlarından hangi difeomorfiyle yapışırsa yapışsın küre verir.

Teoremdaki  $g_2$  ve  $\varphi_2$ 'yi birim difeomorfiler seçelim. Teoremi kullanabilmek için

$$\begin{array}{ccc} \partial X_1 & \xrightarrow{\varphi_1|_{\partial X_1}} & \partial X_2 \\ g_1 \downarrow & & \downarrow br \\ \partial Y_1 & \xrightarrow{br} & \partial Y_2 \end{array}$$

diyagramımı değişmeli yapacak bir  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow X_2$  bulmalıyız. Böyle bir difeomorfi varsa, Teorem 13 üstteki yapıştırmanın sonucunun alttaki yapıştırmanın sonucuna yani  $S^2$ 'ye (Aıştırma 15) difeomorf olduğunu söyleyecek ve kanıt bitecek. Öyle bir  $\varphi_1$ 'in varlığını Aıştırma 14 gösteriyor.  $\square$

**Aıştırma 14.** Çemberden kendisine verili herhangi bir  $g_1$  difeomorfsi için  $\varphi_1|_{S^1} = g_1$  olacak biçimde daireden daireye bir  $\varphi_1$  difeomorfsi var olduğunu kanıtlayın. Bu difeomorfsiyi gıcır yapmaya çalışın. Analitik yapabilir misiniz?

**Aıştırma 15.**  $D^2$  birim dairesi  $\mathbb{R}^2$ 'nin,  $S^2$  birim küresi  $\mathbb{R}^3$ 'ün altuzayları olmak üzere  $D^2 \cup_{br} D^2$ 'nin  $S^2$ 'ye homeomorf olduğunu gösterin (burada  $br, \partial D^2$ 'den kendisine birim gönderim). Difeomorf olduklarını daha ileride geri dönüp kanıtlayın.

**Aıştırma 16.**  $n$  boyutlu kapalı (tıkHz ve kenarsız) bir manifoldun üstündeki bir Morse fonksiyonunun iki kritik noktası varsa bu manifold  $S^n$ 'ye homeomorf mu olmak zorunda?  $S^2$  için yaptığımız kanıta benzer bir kanıt yapmak isterseniz hangi teoremlere ihtiyaç duyarsınız? Araştırın.

Bu dersin meyvelerini toplayalım şimdi:

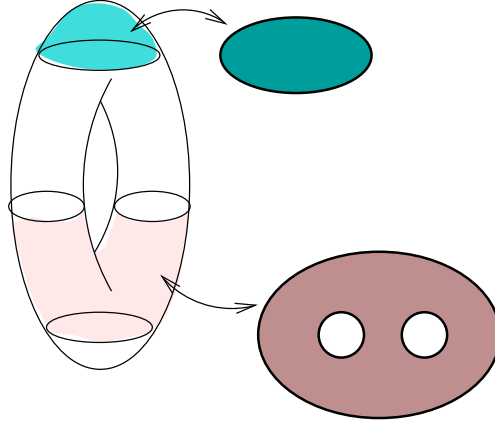
**Alıştırma 17.**  $A = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \cdot z_2 = 1\}$  kompleks düzlemde bir hiperyüzey olsun. Bu yüzey üzerinde tanımlı bir Morse fonksiyonu inşa edip, bu yüzeyin  $S^1 \times I$ 'ya difeomorf olduğunu gösterin.

## Ders 4: Morse Önsavının kanıtı I

Bu derste geçen ders tanımlamaktan sürekli kaçtığımız kenarlı manifoldlardan söz edeceğiz ve daha sonra Morse Önsavının kanıtı için gerekli birkaç önsavı kanıtlayacağız. İlk bölüm için bakılabilecek kaynaklar [Mil1] ya da [GuPo].

### 4.1 Kenarlı manifold

Morse kuramı kullanarak manifoldları inceleyeceğimiz zaman, başlangıç manifoldumuz kenarlı olmasa bile kenarlı manifoldlara ihtiyaç duyacağız. Geçen ders bir küreyi iki daire ve bir silindire ayırmıştık. Tüm bunlar birer kenarlı manifold. Kenarı olmayan bir manifoldu anlamak için Morse Kuramı çerçevesinde izleyeceğimiz strateji şöyle olacak. Verilen manifold için bir Morse fonksiyonu bulacağız. Kritik noktalarını sınıflandırıp karşılık gelen Morse komşulukları yardımıyla manifoldu parçalara böleceğiz. Parçalar kenarlı manifoldlar olacak. Bunların birbirine nasıl yapıştığını anlayarak manifoldun nasıl inşa edildiğini göreceğiz (Şekil 9).



Şekil 9: Simitin gördüğümüz yükseklik fonksiyonuna göre kimi parçaları.

Kenarlı manifoldları da aynen manifoldlarda yaptığımız gibi  $\mathbb{R}^n$ 'nin açık alt uzaylarıyla parametrize edeceğiz fakat bu sefer alt uzaylar  $\mathbb{R}^n$ 'nin üst yarısında olacak. Üst yarısı derken  $\mathbb{H}^n \doteq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$  kümesini ve üstünde  $\mathbb{R}^n$ 'den tetiklenen topolojiyi kastediyoruz.  $\mathbb{H}^n$ 'nin  $\mathbb{R}^n$ 'de topolojik kenarını  $\partial\mathbb{H}^n$  olarak göstereceğiz. Bu durumda bir parametrizasyonla  $\mathbb{H}^n$ 'nin kenarına denk gelen noktaların kümesine manifoldun kenarı denecek.

**Tanım 12.**  $M$  Hausdorff ve ikinci sayılabilir ise ve  $M$ 'nin her noktası çevresinde  $\mathbb{H}^n$ 'de açık bir kümeden kalkıp gelen bir homeomorfi bulunabiliyorsa  $M$ 'ye kenarlı,  $n$  boyutlu topolojik manifold denir.

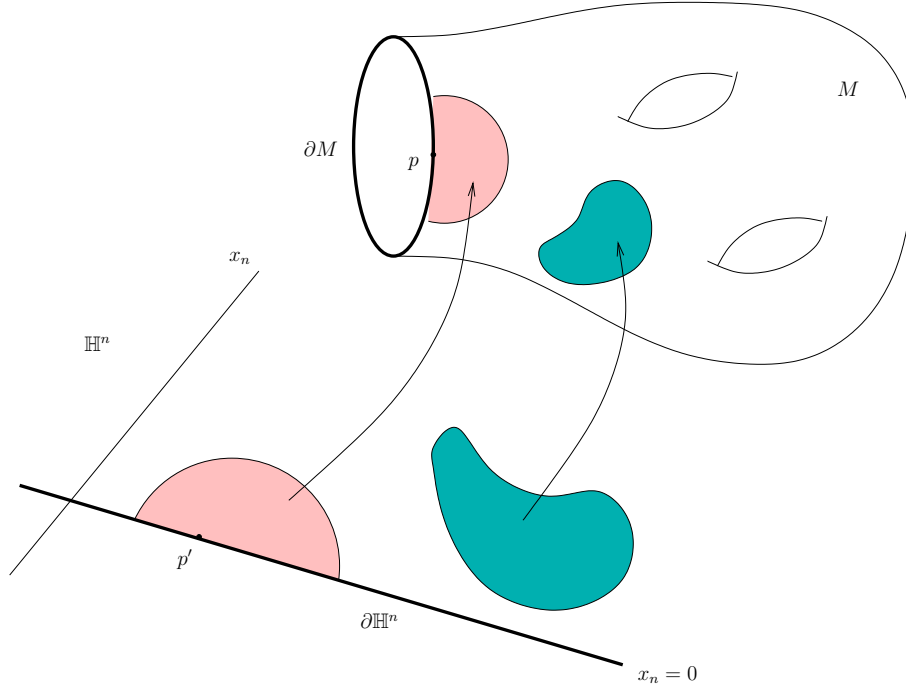


Eğer  $M$ 'nin bir noktası bir parametrizasyon altında  $\partial\mathbb{H}^n$ 'ye düşüyorsa o noktaya  $M$ 'nin bir kenar noktası, bu tür noktaların uzayına da  $M$ 'nin kenarı denir ve  $\partial M$  olarak gösterilir (Şekil 10).

**Alıştırma 18.** Kenarlı bir topolojik manifoldda kenar noktası olmanın iyi tanımlı olduğunu gösterin; yani  $M$  kenarlı bir manifoldsa ve  $p \in M$  bir parametrizasyonla  $\partial\mathbb{H}^n$ 'ye düşüyorsa, her parametrizasyonla  $\partial\mathbb{H}^n$ 'ye düşeceğini gösterin (Bu soru zor. Yeterince düşündükten sonra asıl neyin kanıtlanması gerektiğini bulun ve sonra kitaplara danışın).

Dikkat: kenarlı bir topolojik manifoldda her parametrizasyonun kalkış kümesi  $\partial\mathbb{H}^n$ 'ye değmek zorunda değil (Şekil 10).

Şimdi, daha önce yaptığımız gibi geçiş gönderimlerinin türevli olmasını isteyeceğiz ama bu koşul  $\mathbb{H}^n$ 'nin kenarında sorun çıkarabilir. Bu sorunu Tanım 7'deki gibi halledeceğiz.



Şekil 10: Kalın çizgiler her iki manifoldun kenarlarını gösteriyor.  $p$  bir kenar noktası.

**Tanım 13.**  $M \subset \mathbb{R}^K$  kenarlı bir topolojik  $n$ -manifold olsun. Bir  $p \in \partial M$  kenar noktası;  $\mathbb{H}^n$ 'de açık bir  $V$ ;  $p$ 'yi içeren,  $M$ 'de açık bir  $U$  ve burada çalışan  $\phi : V \rightarrow U$  parametrizasyonu seçelim. Eğer her  $p$  ve olası her bu tarz seçim için  $\phi^{-1}$  gönderimi  $p$  çevresinde  $\mathbb{R}^K$ 'de açık bir  $W$  kümesinden  $\mathbb{R}^n$ 'ye tam rank olarak

türevli ( $C^k$ , gıcvr) bir biçimde genişletilebiliyorsa  $M$ 'ye kenarlı, türevli manifold denir.

Kısacası parametrizasyonların kalkış ve varış kümelerini kenarlar civarında biraz genişleterek türevin bir komşulukta tanımlanmasına olanak veriyoruz.

Manifold kenarı hakkında bazı gözlemler:

**Alıştırma 19.** *Topolojik kenar ile manifold kenarı birbirinden farklıdır*

**Alıştırma 20.** *Türevli manifoldun kenarı türevli manifolddur.*

**Alıştırma 21.**  $\partial(\partial M) = \emptyset$ .

## 4.2 Morse Önsavının kanıtı için birkaç önsav

Şimdi Morse Önsavının kanıtına başlayalım.

**Kanıt (Morse Önsavı).** Kanıtı  $n = 2$  için yapacağız fakat  $n > 2$  için kanıt aynı adımlarla genelleştirilebilir. Önce önsavı hatırlayalım:

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Morse olsun.  $p_0$   $f$ 'nin bir kritik noktasıysa,  $p_0$  çevresinde öyle bir koordinat sistemi vardır ki orada

$$f = f(p_0) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$$

olur.

Şimdi  $(0, 0)$  noktasını  $p_0$ 'a götüren herhangi bir  $h$  parametrizasyonuyla başlayalım. Aşağıda gösterim uzamasın diye,  $f \circ h$  fonksiyonunu yine  $f$  harfiyle gösteriyoruz.

$f$ 'nin  $0 = (0, 0)$ 'daki Hessiani

$$Hf(0) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$$

idi. Hessiannın  $0$ 'da tekil olmadığını biliyoruz.

**Önsav 14.**  *$0$  çevresinde öyle bir koordinat dönüşümü yapılabilir ki  $f_{11}(0) \neq 0$  olur.*

**Kanıt.** Eğer  $f_{11}(0) = 0$  ise o zaman  $H(f)(0)$  tekil olmadığı için  $f_{12}(0) \neq 0$  olmalı. Eğer  $f_{22} \neq 0$  ise,  $x' = y$  ve  $y' = x$  kordinat dönüşümü işimizi görür. Yani transformasyon matrisi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olacak. Böylece yeni Hessian

$$H' = J^T H J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{22} & f_{21} \\ f_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

olacak (Teorem 6'nın kanıtına bakın). Eğer  $f_{22} = 0$  ise bu sefer  $x' = x + y$ ,  $y' = x - y$  dönüşümü (yani  $\mathbb{R}^2$ 'de  $\pi/4$  radyanlık dönüş ve biraz uzama) ile:

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ve } J^T H J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{12} & 0 \\ 0 & -f_{12} \end{pmatrix}$$

olur. □

Ne işe yaradığı şimdi belli olmayan ama ileriki adımlarda sık sık kullanacağımız bir önsavla dersi bitirelim.

**Önsav 15.**  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(0, 0) = 0$  verilsin. Bu  $u$  için  $\mathbb{R}^2$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye öyle  $g$  ve  $h$  fonksiyonları vardır ki

$$u(x, y) = x \cdot g(x, y) + y \cdot h(x, y)$$

olur. Üstelik  $u_1(0, 0) = g(0, 0)$  ve  $u_2(0, 0) = h(0, 0)$  sağlanır.

**Kanıt.**  $u$  fonksiyonunu şöyle yazalım:

$$u(x, y) = u(x, y) - u(0, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx, ty) dt = \int_0^1 (x \cdot u_1(xt, ty) + y \cdot u_2(xt, ty)) dt.$$

İstenen fonksiyonları

$$g(x, y) = \int_0^1 u_1(xt, ty) dt \text{ ve } h(x, y) = \int_0^1 u_2(xt, ty) dt$$

olarak tanımlarsak,  $u(x, y) = x \cdot g(x, y) + y \cdot h(x, y)$  elde edilir. Ayrıca,

$$g(0, 0) = \int_0^1 u_1(0, 0) dt = u_1(0, 0) \cdot t|_0^1 = u_1(0, 0)$$

ve

$$h(0, 0) = \int_0^1 u_2(0, 0) dt = u_2(0, 0) \cdot t|_0^1 = u_2(0, 0)$$

olur. □

**Alıştırma 22.** Yukarıdaki önsavın bir  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için yazıp kanıtlayın.

## Ders 5: Morse Önsavının kanıtı II

### 5.1 Kanıt

Bu derste Morse Önsavının kanıtına devam edeceğiz ve ardından Morse fonksiyonlarının manifold üzerinde var olup olmadığı ve "yoğunluğu" hakkında konuşacağız.

Geçen dersin sonunda kanıtladığımız Önsav 15'da bir  $u$  fonksiyonunu  $g$  ve  $h$  fonksiyonları cinsinden yazmıştık. Şimdi Morse Önsavının hipotezinde bize verilen  $f$  fonksiyonu için aynı önsavı çalıştırıp  $g$  ve  $h$  fonksiyonlarını bulduktan sonra  $g$  ve  $h$  için yine aynı önsavı çalıştıracacağız. Bunun için  $g(0,0) = 0 = h(0,0)$  olması gerekiyor ama zaten öyle çünkü  $f_1(0,0) = 0 = f_2(0,0)$ , yani  $(0,0)$  bir kritik nokta! Böylece önsav sayesinde

$$g(x, y) = x \cdot h^{11}(x, y) + y \cdot h^{12}(x, y), \quad (h^{11}(0,0) = g_1(0,0), h^{12}(0,0) = g_2(0,0))$$

ve

$$h(x, y) = x \cdot h^{21}(x, y) + y \cdot h^{22}(x, y), \quad (h^{21}(0,0) = h_1(0,0), h^{22}(0,0) = h_2(0,0))$$

eşitliklerini sağlayan  $h^{11}, h^{12}, h^{21}, h^{22}$  fonksiyonlarını buluruz. O halde;

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xg + yh \\ &= x(xh^{11} + yh^{12}) + y(xh^{21} + yh^{22}) \\ &= x^2h^{11} + xy(h^{12} + h^{21}) + y^2h^{21} \\ &= x^2H^{11} + xyH^{12} + y^2H^{21} \end{aligned}$$

olur. Burda  $H^{11} = h^{11}$ ,  $H^{22} = h^{22}$  ve  $H^{12} = (h^{12} + h^{21})$  olarak alındı. Bu arada,

$$\begin{aligned} H^{11}(0,0) &= h^{11}(0,0) = \left( \int_0^1 g_1(xt, ty) dt \right)_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \int_0^1 t f_{11}(0,0) dt = \frac{t^2}{2} f_{11}(0,0) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} f_{11}(0,0) \end{aligned}$$

olur. Demek ki  $H^{11}(0,0)$  sıfır değil. Şimdi yeni bir koordinat sistemini

$$X = \sqrt{|H^{11}|} \left( x + \frac{H^{12}}{H^{11}} y \right) \quad \text{ve} \quad Y = y$$

olarak seçelim.  $\frac{\partial X}{\partial x}(0,0) = \sqrt{|H^{11}(0,0)|} \neq 0$  olduğundan bu dönüşüm gerçekten bir difeomorfidir (koordinat dönüşümü). Burda içersinde mutlak değer içeren bir ifadenin türevi alındığı için mutlak değerle ilgili bir sorun çıkacağı düşünülebilir. Fakat  $|H^{11}|(0,0)$  noktasında 0'dan büyük olduğu için böyle bir sorun yoktur.

Şu hesapları yapınca sorunun bittiğini göreceğiz. Önce:

$$\begin{aligned} X^2 &= |H^{11}| \left( x^2 + 2xy \frac{H^{12}}{H^{11}} + \left( \frac{H^{12}}{H^{11}} \right)^2 y^2 \right) \\ &= \sigma_1 \left( H^{11} x^2 + 2xy H^{12} + \frac{(H^{12})^2}{H^{11}} y^2 \right). \end{aligned}$$

Burda  $\sigma_1 \in \{-1, +1\}$ ,  $H^{11}$ 'in işareti. Böylece,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sigma_1 X^2 - \frac{(H^{12})^2}{H^{11}} Y^2 + H^{22} Y^2 \\ &= \sigma_1 X^2 + \frac{H^{22} H^{11} - (H^{12})^2}{H^{11}} Y^2 \\ &= \sigma_1 \tilde{X}^2 + \sigma_2 \tilde{Y}^2 \end{aligned}$$

elde ediyoruz. Burda

$$\tilde{X} = X \quad \text{ve} \quad \tilde{Y} = \sqrt{\frac{H^{22} H^{11} - (H^{12})^2}{H^{11}}}$$

yeni koordinatlar ve  $\sigma_2$  bu karekök içindeki ifadenin işareti. Böylece Morse Önsavını kanıtladık: birkaç koordinat dönüşümü ardından öyle bir koordinat sistemine yerleştik ki bu koordinatlarda  $(0, 0)$  noktası yakınlarında  $f$  artı/eksi kareler toplamı olarak yazıldı. *Morse Önsavının kanıtının sonu*  $\square$

## 5.2 Morse fonksiyonlarının varlığı ve çokluğu

Demek ki Morse fonksiyonları, kritik noktalarında bile yeterince iyi davranıyormuş. Ama acaba herhangi bir manifold verildiğinde böyle güzel Morse fonksiyonları bulabiliyor muyuz? Yanıt evet, hem de tıkmaz, kapalı manifoldlarda herhangi bir  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna istediğimiz kadar *yakın* bir Morse fonksiyonu bulabiliyoruz. Fakat bunu göstermek için bu ders ve önümüzdeki ders önce bir kaç önsav kanıtlayacağız.

İlk olarak, yakın demekle ne demek istiyoruz?

**Tanım 14.**  $K \subset \mathbb{R}^n$  olmak üzere,  $K$  üzerinde gerçel değerli ve iki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların kümesini  $C^2(K, \mathbb{R})$  olarak gösterelim. İki fonksiyon  $\phi, \psi \in C^2(K, \mathbb{R})$  iken, bir  $\varepsilon > 0$  verildiği durumda her  $p \in K$  ve  $1 \leq i, j \leq n$  için aşağıdaki koşullar sağlandığında  $\phi$   $\psi$ 'ye  $\varepsilon$  kadar  $C^2$ -yakınlığında ya da  $\phi$   $\psi$ 'ye  $C^2$  bakımından  $\varepsilon$ 'dan yakın diyoruz:

$$\begin{aligned} |\phi(p) - \psi(p)| &< \varepsilon \\ |\phi_i(p) - \psi_i(p)| &< \varepsilon \\ |\phi_{ij}(p) - \psi_{ij}(p)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

**Önsav 16.**  $U \subset \mathbb{R}^n$  açık ve  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gıcır olsun. Öyle bir  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  vardır ki,

$$\hat{f}(p) = f(p) - \sum_{k=1}^n a_k \cdot x_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Morse'tur ve  $|a_k|$ 'ler istenildiği kadar küçük seçilebilir.

Burda şuna dikkat edelim: bu önsav bütün manifold üzerinde değil sadece manifoldda tanımlı bir açık komşulukta geçerli. Bu fonksiyonun manifoldu kaplayan diğer açık örtüler için çalışıp çalışmayacağı yönünde bir bilgimiz henüz yok.

**Kanıt.**  $\hat{f}$  fonksiyonunun bir  $p$  noktasındaki türevi

$$D\hat{f}(p) = Df(p) - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ve Hessian matrisi  $H\hat{f}(p) = Hf(p)$  olacak. Böylece eğer  $p'$ ,  $\hat{f}$ 'nin kritik noktası ise

$$Df(p') = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

koşulu ve  $p'$ 'nin dejenere olmaması için de  $Hf(p') \neq 0$  koşulları sağlanmalı. Dolayısıyla bizim elimizde bir

$$Df : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$$

operatörü var; biz bu operatör için öyle bir  $a \in \mathbb{R}^n$  istiyoruz ki  $Df(p) = a$  koşulunu sağlayan  $p$ 'ler için  $Hf(p)$  tekil olmasın. Eğer  $Df = g$  diye bir isimlendirme yaparsak aşağıdaki çok güçlü *Sard teoremi* bize bu koşulun sağlanabileceği yönünde güvence verir ve kanıtımız biter.  $\square$

Sard teoremi çok güçlü bir teorem. Kanıtı da zor değil. [Mil1] ya da [Hirs] kullanılabilir.

**Teorem 17. (Sard teoremi)**  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  türevlenebilir fonksiyonunun kritik değerleri kümesinin  $\mathbb{R}^n$ 'de ölçüsü sıfırdır.

## Ders 6: Morse fonksiyonlarının yoğunluğu

Bu derse, geçen ders çıktlattığımız Morse fonksiyonlarının *yoğunluğunu* söyleyen teorem için gereken önsavları tartışmakla başlayacağız. Ardından teoremi açıkça yazıp kanıtını konuşacağız. [Mats]'ı izliyoruz.

**Önsav 18.** *Herhangi bir tıkız  $M$  manifoldu sonlu sayıda tıkız  $K_i$  alt uzayıyla örtülebilir.*

**Kanıt.** Önce aşağıdaki alıştırmaı kullanarak herbir nokta için o noktayı içine alan  $V_x \subset K_x \subset U_x$  kümelerini bulun. Burda  $V_x$  ve  $U_x$  açık,  $K_x$  tıkız. Daha sonra  $V_x$ 'lerden sonlu tanesinin  $M$ 'yi örttüğünü fark edip kanıtı bitirin.  $\square$

**Alıştırma 23.**  *$U$  altuzayı yerel olarak tıkız bir Hausdorff uzayında açık olsun.  $U$  içinde öyle bir açık küme vardır ki kapanışı hem tıkızdır hem de  $U$ 'nın içindedir.*

**Önsav 19.**  *$K$ , bir  $M$  manifoldunun tıkız bir altmanifoldu olsun;  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  gıcır ve  $g|_K$  Morse olsun. Eğer yeterince küçük bir  $\varepsilon > 0$  için  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  gönderimi,  $C^2$  bakımından  $g$ 'ye  $\varepsilon$ 'dan daha yakınsa,  $f|_K$  de Morse'tur.*

**Kanıt.**  $g|_K$  Morse demek,  $g$ 'nin  $K$ 'de dejenere noktası yok demek. Bunu,  $p \in K$  bir kritik nokta olmak üzere şöyle de ifade edebiliriz:

$$s(p) = \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial g}{\partial x_n} \right| + |\det H(g)| > 0.$$

Dejenere olmayan bir kritik nokta olmak için fonksiyonun kısmi türevleri sıfır olmalı ve Hessian'ın determinantı pozitif olmalı. Dolayısıyla  $s : K \rightarrow M$  gönderimi  $p$ 'de yukarıdaki ilişkiyi sağlamalı.

Şimdi, öncelikle

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$$

olduğundan

$$\sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \geq \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_i \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \geq \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} - n\varepsilon.$$

Aynı şekilde determinantlar için de

$$|\det H(f)| \geq |\det H(g)| + |\det H(g) - \det H(f)|.$$

Şimdi tıkız uzaylarda sürekli operatörler sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} |\det H(g)(p) - \det H(f)(p)| &\leq \|\det\| \cdot |H(g)(p) - H(f)(p)| \\ &\leq M_d \cdot \|H\| \cdot |g - f| \\ &\leq M_d \cdot M_h \varepsilon \end{aligned}$$

buluruz (burda  $M_d, M_h \in \mathbb{R}^+$ ). Dolayısıyla

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + |\det H(f)| \geq \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + |\det H(g)| - n \cdot \varepsilon - M_d \cdot M_h \cdot \varepsilon = \rho - n \cdot \varepsilon$$

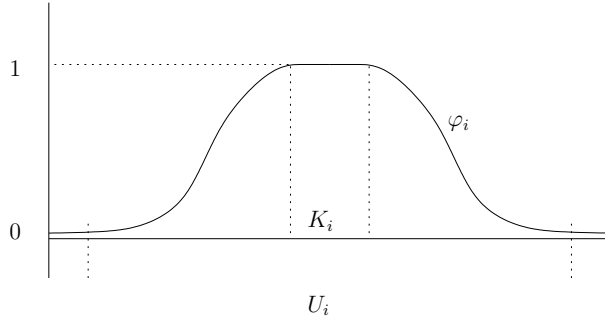
elde ederiz.  $\rho$  pozitif bir sayı olduğu için,  $\varepsilon$  yeterince küçük seçilerek Hessian'ın tekil olmaması sağlanır.  $\square$

Her fonksiyonun istenildiği kadar yakınında bir Morse fonksiyonu var:

**Teorem 20.** *Kapalı manifoldlarda herhangi bir  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna  $C^2$  bakımından istenildiği kadar yakın bir Morse fonksiyonu vardır.*

**Kanıt.** Bunun için önce geçen dersteki Önsav 18'u kullanarak manifoldu bir  $\{U_i\}_{i=1}^n$  sonlu açık örtüsü ve  $\{K_i : K_i \subseteq U_i\}_{i=1}^n$  sonlu tıkHz örtüsü ile örtelim.

Sonra 5. dersteki Önsav 16'yi kullanarak  $M$  üzerinde tanımlı reel değerli bir  $g$ 'ye  $U_i$ 'de  $C^2$  bakımından yakın ve Morse bir  $f_i$  bulabiliriz öyle ki  $a^i \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(p) = g(p) + (a^i \cdot p) \varphi_i(p)$  olur. Bu ifadenin anlamlı olabilmesi için  $p$  noktasını aynı zamanda bir koordinat sistemi aracılığıyla  $\mathbb{R}^n$ 'de düşünüyoruz. Ayrıca burda  $\varphi_i$  fonksiyonu  $K_i$ 'de 1 değerini alan,  $U_i \setminus K_i$ 'de değeri düşen ve  $U_i$  dışarsında sıfır değerini alan sürekli bir fonksiyon (Şekil 11). Şekli yüzünden bu fonksiyona *şapka fonksiyonu* diyeceğiz. Son olarak  $U_i$  dışarsında ise  $f_i = g$  olsun.



Şekil 11:  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  basamak fonksiyonu

**Alıştırma 24.** *Yukarıdaki  $\varphi_i$  şapka fonksiyonunu gıcır bir biçimde inşa edin. Bu fonksiyonlar analitik yapılabilir mi?*

Şimdi adım adım *dikme* işlemi yapalım.  $l$ 'inci adımda  $C_l = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$ ,  $f_l : M \rightarrow \mathbb{R}$   $g$ 'ye yakın ve  $C_l$ 'de Morse olsun. O zaman  $p \in U_{l+1}$  için  $f_{l+1}(p) = f_l(p) + (a^{l+1} \cdot p) \varphi_{l+1}(p)$ ,  $U_{l+1}$  dışındaysa  $f_{l+1} = f_l$  olsun. Yani  $f_1$ 'i yavaş yavaş açık kümelerle genişleterek  $C_{l+1}$  gibi daha geniş bir tıkHz küme üzerinde Morse hale getirmeye çalışıyoruz.



Örtülerimiz sonlu olduğundan böyle bir dikme işlemi ardından elde edilen  $f = f_n$  fonksiyonu  $M$ 'de tanımlı  $g$ 'ye  $C^2$  bakımından yakındır. Bu fonksiyon  $C_n = M$ 'de Morse gibi gözükmemektedir. Fakat Morse özelliği için dikkat etmemiz gereken bir nokta var: iki farklı  $K_i$  kümesinin birbiri ile kesiştiği durumlar. Bu durumda farklı Morse fonksiyonları üstüste geleceği için,  $a$  çarpanları toplanarak istemediğimiz kadar büyüyebilir. Fakat unutmayalım ki Morse fonksiyonlarının inşasında kullandığımız  $a_i$  çarpanları istediğimiz kadar küçük seçebiliyorduk. Bu kesişen  $N$  tane  $f_i$  fonksiyonunun çarpanlarının en küçüğü  $a$  olsun. Şimdi bu çarpanların hepsini  $\frac{a}{N}$  ile değiştirdiğimiz zaman bu fonksiyonlar hem kesişim alanında hem de dışarıda Morse olma özelliğini koruyacaktır.  $\square$

## Ders 7: Teğet demetleri

Şimdi teğet demetlerinden bahsedeceğiz. Teğet demeti aracılığıyla, bir manifold üzerinde türevli bir vektör alanını iyice tanımlayabileceğiz. Bunu yapmaktaki amacımız, ileriki derslerde, üzerinde bir Morse fonksiyonu verilmiş bir manifoldun topolojisini, fonksiyona karşılık gelen bir vektör alanı yardımıyla anlamak olacak.

Bir manifoldun *teğet demeti*, manifoldun her noktasındaki her *vektörü* eman olarak kabul eden bir manifolddur. Ama bir manifoldun bir noktasında vektör ne demek? Bunu, bir cebircinin, fizikçinin ve geometricinin gözünden üç farklı yolla inşa edip, bu inşaların denkleğini göstereceğiz. Burası için kaynak [Spi1] olabilir.

### 7.1 Teğet vektör ve teğet demetinin cebirci inşası

$M$  tıkız, sınırlı bir manifold ve  $p \in M$  olsun.  $p$  çevresinde iki parametrizasyon alalım:  $g : U_{p'} \subset R_1 = \mathbb{R}^n \rightarrow U_p$  ve  $h : U_{p''} \subset R_2 = \mathbb{R}^n \rightarrow U_p$  olsun. Burda  $g(p') = p$  ve  $h(p'') = p$ . Ayrıca  $u$  ve  $v$ ,  $p'$  ve  $p''$  noktalarında  $\mathbb{R}^n$ 'ye teğet vektörler olsun:  $u \in T_{p'}R_1$ ,  $v \in T_{p''}R_2$

Cebirci inşasında manifold üzerindeki bir teğet vektörü,  $(h, v)_p$  ikilileriyle, yani parametrizasyon uzayından bir teğet vektörü ve o uzaydaki noktaları manifoldta atan parametrizasyon çiftiyle gösteriyoruz.

Şimdi, türev operatörü kalkış kümesindeki teğet vektörlerini, varış kümesindeki teğet vektörlere götürecekti. Öyleyse iki ayrı parametrizasyondan gelen teğet vektörler için şöyle bir denklik bağıntısı kurmak makuldür:

$$(h, v)_p \sim (g, u)_p \Leftrightarrow D(h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))u = v.$$

Bu bağıntıyı bir inceleyelim önce.  $D(h^{-1} \circ g)$  gönderimi,  $R_1$ 'de bir  $g^{-1}(p)$  noktasında tanımlı ve o noktanın teğet uzayındaki vektörleri  $R_2$  uzayında  $h^{-1}(p)$ 'nin teğet uzayındaki vektörlere götüren bir operatör oluyor.

**Alıştırma 25.** Yukarıdaki bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

$M$ 'nin teğet demeti manifoldunu tüm bu denklik sınıflarının kümesi olarak inşa edeceğiz ve  $TM$  olarak göstereceğiz:

$$TM \doteq \{[(h, v)_p] \mid p \in M, h : \mathbb{R}^n \rightarrow M, v \in T_{h^{-1}(p)}\mathbb{R}^n\}.$$

$TM$ 'nin üzerine, aşağıdaki  $\pi$  izdüşüm gönderimini sürekli yapan en kaba topolojiyi koyuyoruz:

$$\pi : TM \rightarrow M, [h, v]_p \mapsto p.$$

Bu topoloji için bir temel,  $\{\pi^{-1}(U) \mid U \subset M \text{ açık}\}$  topluluğudur.

**Alıştırma 26.**  $A$  bir küme ve  $X$  bir uzay olmak üzere  $f : A \rightarrow X$  gönderimini sürekli yapan en kaba topoloji tektir, gösterin. Burada en kaba demek,  $f$ 'yi sürekli

yapan tüm topolojilerin içinde yer almak demek. Bu topolojiyle  $f$ 'nin bir bölüm gönderimi olduğunu gösterin. En kaba topolojinin bir temelinin  $\{\pi^{-1}(U) \mid U \subset X \text{ açık}\}$  olduğunu gösterin.

**Alıştırma 27.** Yukarıdaki topolojiyle  $TM$ 'nin bir manifold olduğunu gösterin.

Ayrıca  $M$ 'nin  $p$ 'de teğet uzayını eskisi gibi  $T_pM \doteq \{[h, v]_p\}$  olarak gösteriyoruz.  $T_pM$ 'ye bir vektör uzayı yapısı verilebilir. İşlemleri şöyle tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} [h, v]_p + [g, u]_p &= [g, D(g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v + u], \\ r[h, v]_p &= [h, rv]_p. \end{aligned}$$

**Alıştırma 28.** Toplamın iyi tanımlı olması için  $[g, D(g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v + u] = [h, D(h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))u + v]$  olması gerekir. Bunun böyle olduğunu ve  $T_pM$ 'nin diğer vektör uzayı belitlerini sağladığını gösteriniz.

## 7.2 Fizikçi inşası

Bu inşayı bir parçacığın manifold üzerindeki bir hareket eğrisine herhangi bir noktada teğet olan vektörü tanımlayarak yapacağız. Bu tanımlı yapmaktaki motivasyon, dinamik bir sistemde bir parçacığın hareketini incelerken bir kuvvet alanının anlık etkisini izlemek.  $M$  manifoldunda herhangi bir  $p$  noktadan geçen herhangi bir türevli eğri  $\gamma$  alalım:

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = p, p \in M.$$

$M$ 'de türevli eğriler kümesi üstünde şöyle bir denklik kuralım:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow D\alpha(0) = D\beta(0).$$

Böylece teğet demeti manifoldunu şöyle tanımlıyoruz:

$$TM \doteq \{M\text{'deki tüm türevli eğriler}\} / \sim$$

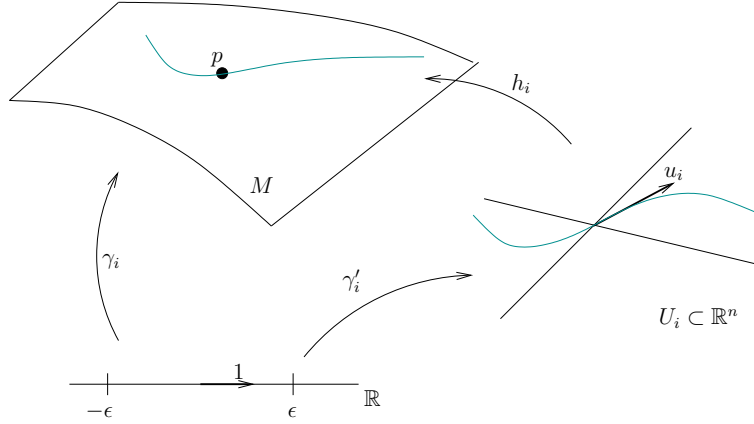
Bu tanımın cebirci inşasıyla örtüştüğünü görelim.  $i = 1, 2$  olmak üzere  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow U_i \subset \mathbb{R}^n, 0 \mapsto 0$  eğrilerini ve  $h_i : U_i \rightarrow M, 0 \mapsto p$  parametrizasyonlarını alalım öyle ki  $\gamma_i = h_i \circ \gamma'_i$  eşitlikleri sağlansın (Şekil 12).  $u_i = Dh_1(0)(1) \in T_0\mathbb{R}^n$  olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \gamma_1 \sim \gamma_2 &\Leftrightarrow Dh_1(0) \circ D\gamma'_1(0)(1) = Dh_2(0) \circ D\gamma'_2(0)(1) \\ &\Leftrightarrow Dh_1(0)(u_1) = Dh_2(0)(u_2) \\ &\Leftrightarrow [h, u_1]_p \sim [h_2, u_2]_p \end{aligned}$$

buluruz.

## 7.3 Geometrici inşası

Bu inşada, bildiğimiz türev ile ilişkili *derivasyon* denen bir nesneden faydalanacağız. Bunlar, manifoldun her noktadaki teğet uzayını geren vektörleri meydana getirecek.  $M$  manifoldunun  $p$  noktasındaki  $C^\infty$  fonksiyonların uzayını  $C^\infty(M, p)$  olarak gösterelim.



Şekil 12:

**Tanım 15.** Her  $f, g \in C^\infty(M, p)$  için aşağıdaki özellikleri sağlayan  $l : C^\infty(M, p) \rightarrow C^\infty(M, p)$  gönderimine  $p$  noktasında bir (doğrusal) derivasyon denir:

- (1)  $l(rf) = rl(f)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $l(f \cdot g) = f \cdot l(g) + g \cdot l(f)$ ;
- (3)  $l(f + g) = l(f) + l(g)$ .

$l$  ve  $k$  derivasyonları ve  $r \in \mathbb{R}$  için,  $(l+k)f = l(f) + k(f)$  ve  $(rl)(f) = r(l(f))$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) olarak tanımlanan iki işlemle birlikte, bir noktadaki tüm derivasyonlar kümesi bir vektör uzayı olur.

$p$  noktasındaki her bir derivasyona  $M$ 'nin  $p$ 'de teğet vektörü denir.  $l_p$ ,  $p$  noktasında bir derivasyon olmak üzere,  $M$ 'nin teğet demetini de, tüm  $(l_p, p)$  ikililerinin kümesi olarak tanımlanır.

**Teorem 21.** Her  $p \in M$  için en az bir teğet vektörü (derivasyon) vardır.

**Kanıt.**  $p$  çevresinde bir  $h = (x_1, \dots, x_n)$  yaması alalım. O zaman Tanım 5'te tanıttığımız  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  operatörü bir derivasyondur. Bunu göstermek için yukardaki özelliklerden ikincisini sağladığımızı göstereceğiz; diğerlerini alıştırmalar olarak bırakalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)(p) &= \frac{\partial}{\partial x_i}((f \circ h) \cdot (g \circ h))(p') \\ &= f(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ h)(p') + g(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ h)(p') \\ &= f(p) \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) + g(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

**Alıştırma 29.**  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  operatörünün diğer özellikleri sağladığını gösterin. □

Buna ek olarak  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$  ve  $(y_j)_{j=1, \dots, n}$ ,  $p$  çevresinde iki ayrı parametrizasyon olsun.  $p$  çevresinde her  $q$  noktası için

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(q) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

olduğundan  $\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$  buluruz yani  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  derivasyonu,  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  derivasyonlarının doğrusal birleşimi olarak yazılabiliyor. İddiamız,  $p$ 'deki tüm derivasyonlar için bunun doğru olduğu:

**Teorem 22.** *Bir  $p$  noktasındaki derivasyonlar uzayı  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1, \dots, n}$  ile gerilir.*

**Kanıt.** Bunun için önce şu alıştırmaya ihtiyacımız var:

**Alıştırma 30.**  *$c : M \rightarrow \mathbb{R}$  her noktayı  $c$ 'ye götüren sabit fonksiyon olsun.  $M$  üstünde herhangi bir derivasyon için  $l(c) = 0$  olduğunu gösterin.*

$f \in C^\infty(M, p)$  ve  $c$  her noktayı  $f(p)$ 'ye götüren sabit fonksiyon,  $r = f - c \in C^\infty(M, p)$  olsun. Yukarıdaki alıştırmayı ve sonra Alıştırma 22'i kullanarak,  $p$  yakınında

$$\begin{aligned} l(f) &= l(r) = l((x_1 - p_1)g_1 + \dots + (x_n - p_n)g_n) \\ &= \sum_{i=1}^n l((x_i - p_i)g_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g_i l(x_i - p_i) + (x_i - p_i)l(g_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g_i l(x_i) + (x_i - p_i)l(g_i) \end{aligned}$$

buluruz.  $\frac{\partial r}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = g_i(p)$  olduğuna göre, yukarıdaki toplama  $x = p$  noktasında bakarsak

$$l(f)(p) = \sum_{i=1}^n g_i l(x_i)(p) = \sum l(x_i)(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

elde ederiz. Bu eşitlik herhangi bir  $f$  için doğru olduğundan

$$l = \sum_{i=1}^n l(x_i)(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

sonucuna varırız. □

Burda durup bir noktayı anlamakta yarar var. Bir manifoldun teğet demetini her noktasındaki teğet uzayların birleşimi olarak ifade ettik. Bu teğet uzayları herbir nokta üstündeki teğet vektörlerin girdiği uzaylar. İki farklı noktaya iliştiğimiz teğet uzaylar birbirinden ayrık. Yani örneğin aynı noktaların teğet uzaylarından alınan teğet vektörler arasında bir toplama işlemi tanımlı değil. Dolayısıyla teğet demetinin farklı noktaları üzerindeki teğet vektörlerini birbiriyle doğrudan ilişkilendiremezsiniz. Bu ilişkiyi kuran şey teğet demetinin manifold yapısıdır.

**Alıştırma 31.**  *$M$  boyutu  $n$  olan pürüzsüz bir manifoldsa,  $TM$ 'nin  $2n$  boyutlu pürüzsüz bir manifold olacağını,  $TM$ 'ye yamalar döşeyerek gösterin.*

**Alıştırma 32.**  *$TS^1$  hangi tanıdık manifoldda homeomorf?*

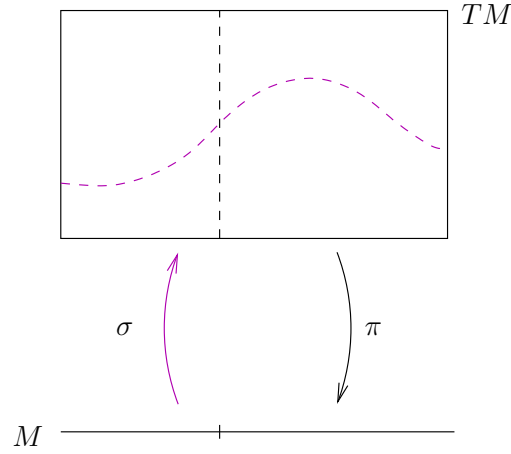
## Ders 8: Gradyanımsı vektör alanları

Amacımız gıcır bir vektör alanını ve bir Morse fonksiyonuyla ilişkili gradyanımsı vektör alanlarını kurmak. İzlenebilecek kaynakla [Mil2] ve [Mats].

### 8.1 Arakesit ve vektör alanı

Önce arakesitleri ve onlar yoluyla manifoldlar üstündeki vektör alanlarını tanımlayacağız.  $\pi : TM \rightarrow M, T_pM \rightarrow \{p\}$  şeklinde çalışın izdüşüm gönderimini düşünelim.

**Tanım 16.** Eğer gıcır bir  $\sigma : M \rightarrow TM$  gönderimi  $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_M$  eşitliğini sağlıyorsa,  $\sigma$  gönderimine bir arakesit denir. Yani aslında bir arakesit, herbir  $p \in M$  için  $T_pM$ 'den türevli bir biçimde birer vektör seçmeye denk gelir. Bu yüzden gıcır bir arakesit aynı zamanda gıcır bir vektör alanı demektir (Şekil 13).



Şekil 13:

Şimdi,  $T_pM$ 'de  $h = (x_i)$  parametrizasyonuna göre bir vektör  $u = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$  şeklindeydi. Böylece  $p$ 'nin bir  $U$  komşuluğunda bir  $X$  vektör alanı, herbir  $x$  noktasında

$$X_x = \sum_{i=1}^n u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilecek. Burda artık herbir  $u_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  gıcır bir fonksiyon. Bu gösterimle bir vektör alanı bir operatör oluyor;  $X$  alanı  $x$  noktasında bir fonksiyon yediğinde

$$X_x(f) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

çıkıyor. Bu da,  $f$ 'nin  $x$  noktasında  $X$  yönündeki türevinden başka bir şey değil.

Amacımız manifoldların üzerinde fonksiyonların davranışını çalışmak olduğu için bir fonksiyonun *gradyanını*, inşa ettiğimiz türden bir vektör alanı olarak görmek makul gelebilir. Ama gradyan ancak iç çarpımın tanımlı olduğu manifoldlarda (örneğin  $\mathbb{R}^n$ 'de ya da bir Riemann metriği döşenmiş manifoldlarda) inşa edilebilir. Bunun yerine biz *gradyanımsı* adını vereceğimiz genel bir geometrik gerci kullanacağız.

## 8.2 Gradyanımsı

**Tanım 17.**  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  bir Morse fonksiyonu,  $h$  ise bir parametrizasyon olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir  $X$  vektör alanına  $f$  için gradyanımsı denir

- (a)  $f$ 'nin kritik noktalarından uzakta  $X(f) > 0$ .
- (b) Kritik noktalar civarında uygun bir Morse yamasında  $X$ ,  $f$ 'nin gradyanına eşit.

Tanımdaki ikinci koşul şunu söylüyor.  $p_0$  bir kritik nokta ve  $h$  Morse yamasının parametrizasyonu olmak üzere

$$X = \nabla(f \circ h)(p'_0) = \nabla \left( f(p_0) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{j=k+1}^n x_j^2 \right) = - \sum_{i=1}^k 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^n 2x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Böylece  $X(f) = \sum_{i=1}^n 4x_i^2$  olacak. Görüldüğü üzere kritik noktalardan uzakta olduğu kadar yakınlarında da gradyanımsı vektör alanı yönünde  $f$ 'nin türevi her zaman pozitif olacak. Yani gradyan vektör alanında olduğu gibi eğer manifold üzerinde gradyanımsı vektör alanı yönünde hareket edersek fonksiyonun değeri her zaman artacak.

**Teorem 23.** Her tıkız, kenarsız, pürüzsüz manifold  $M$  ve gıcır  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  için gradyanımsı bir vektör alanı bulunur.

**Kanıt.** Burda yapacağımız kanıt da Teorem 20'in kanıtına benzeyecek. Bu sefer açık komşuluklarda tanımladığımız gradyanımsı vektör alanlarını birbirine dikeceğiz.

Manifold üzerine öyle bir sonlu  $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$  açık örtüsü inşa edeceğiz ki

- (a)  $K_i \subset U_i$  tıkız olmak üzere  $\cup K_i = M$  olacak (Önsav 18);
- (b) Herbir  $U_i$  bir koordinat yaması olacak ( $U_i$ 'deki koordinat fonksiyonları  $(X_1^i, \dots, X_n^i)$  olsun);
- (c) Her kritik nokta biricik bir  $U_i$ 'de olacak.

Herbir  $i$  için  $M$ 'de bir  $X^i$  vektör alanını şöyle tanımlayalım:

$$X_p^i = \begin{cases} \phi_i(p) \nabla f(p), & p \in U_i \\ 0, & p \notin U_i \end{cases}$$

Burda  $\phi_i$ ler daha önce Teorem 20'de kullandığımız fonksiyonlar (Şekil 11). Şimdi

$$X = \sum_{i=1}^n X^i : M \rightarrow TM$$

vektör alanı tam istediğimiz tür bir alan.  $X$  her yerde tanımlı.  $X$  her bir kritik noktanın bir Morse komşuluğunda  $f$ 'nin bir gradyanına eşit.  $X$ 'in gradyanımsı olduğunu görmek için şu hesabı yapmak yeterli:

$$X(f) = \sum (\phi_i X_i)(f) = \sum \phi_i \nabla f(f) = \sum \phi_i |\nabla f|^2 > 0.$$

□

**Alıştırma 33.**  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto z$  yükseklik fonksiyonu için  $\nabla h = (0, 0, 1)$  gradyan vektör alanının teğet demete izdüşümünün gradyanımsı olduğunu gösterin.



## Ders 9: Akış eğrileri ve akış difeomorfileri

Bu derste bir vektör alanının *integrali* olan akış eğrilerini ve bunlar aracılığıyla tarif edilen akış difeomorfilerini inceleyeceğiz. Bir ödül olarak, Ders 3'te kanıtsız bıraktığımız bir teoremi sonunda kanıtlayabileceğiz. Bu dersin içeriği her ne kadar standart olsa da, mükemmel bir kaynak için Arnold'un kitabına bakın [Arno].

**Tanım 18.**  $X : M \rightarrow TM$  bir vektör alanı,  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralık,  $t_0 \in I$  olmak üzere,

(a)  $D\gamma(t)(1) = X(\gamma(t))$ , her  $t \in I$ ,

(b)  $\gamma(t_0) = p_0 \in M$ ,

eşitliklerini sağlayan  $\gamma$ 'ya  $X$ 'in  $p_0$ 'dan geçen akış eğrisi diyoruz.

(a) ve (b) eşitlikleri altında manifoldun  $p_0$  noktasında bir ilk koşulu olan bir diferansiyel denklem sistemini tarif ediyor. Şimdi böyle bir diferansiyel sisteme alışmak için görmeye alışık olduğumuz kimi denklemlerden örnekler vereceğiz.

**Örnek 1:**  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{dy}{dx} = -y^2$ , sistemi tanıdık dille ifade edilmiş. Bunu yeni dilimize çevirelim.  $Dy$  gönderiminin  $I$ 'daki teğet vektörleri, karşıdaki teğet uzayın vektörlerine götürdüğünü ve teğet uzayların  $\frac{\partial}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial}{\partial y}$ 'lerle gerildiğini hatırlayarak sistemi şöyle de yazabiliriz:

$$Dy \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_x = \frac{dy}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_x = -y^2 \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{y(t)}.$$

Üstelik  $\gamma(t) = y(x)$  yazarak ve  $\mathbb{R}$  üstünde  $X = -y^2 \frac{\partial}{\partial y}$  vektör alanını alarak bu sistemi

$$D\gamma(t) = X(\gamma)(t)$$

biçimine getiririz. Bu sistemi çözelim:

$$y \neq 0 : -\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x + c} (x \neq -c).$$

Görüyoruz ki herbir başlangıç koşulu için biricik akış eğrisi var. Ayrıca bu akış eğrisi bütün  $\mathbb{R}$ 'ye genişletilemez çünkü  $x = -c$  olduğu durumlarda  $y$  tanımlı değil.

**Örnek 2:**  $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$  sistemini alalım. Yani yeni gereçlerimizle

$$Dy(t) = X(y) = y^{2/3} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Bu sistemin genel çözümü  $y = \pm x^3/27$  çıkıyor.  $X$  vektör alanı  $y = 0$  noktasında gıcır olmadığı için biricik çözüm yok.

Şimdi bu gözlemlerimizi, adi diferansiyel denklemler kuramından gelen bilgilerle destekleyelim. Önce çözümlerin varlığı ve teklifi:

**Teorem 24.**  $M$  üzerinde  $C^1$  bir  $X$  vektör alanı ve  $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$  denklemi verilsin. Herhangi  $p_0 \in M$  için  $p_0$ 'i içeren açık bir  $U \subset M$ , bir  $\epsilon > 0$  ve  $C^1$  bir

$$\phi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

vardır ki

$$\phi^{p_0} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad t \mapsto \phi(p_0, t)$$

gönderimi  $\gamma(0) = p_0$  başlangıç koşulu için diferansiyel denklemin biricik çözümünü verir.

$\phi^p$  gönderimi, verilen bir  $t$  zamanı sonra vektör alanı boyunca  $p$  noktasının hangi noktaya aktığını hesaplıyor.  $\phi$ 'den üretilmiş başka bir gönderimi de şöyle tanımlayalım:

$$\phi_t : U \rightarrow M, \quad p \mapsto \phi(p, t)$$

Bu gönderim de  $U$ 'nun verilen her bir noktasının vektör alanı boyunca sabit  $t$  süre sonra nereye aktığını hesaplıyor.

**Teorem 25.** Herbir izin verilen  $t$  için  $\phi_t$  gönderimi görüntüsüne difeomorfdir.

Bu yüzden  $\phi_t$  gönderimlerine akış difeomorfisi diyoruz. Bunlar, tanımlı oldukları kümeyi değişen  $t$  ile  $M$  içinde gezdiriyor ve bunu difeomorf bir biçimde yapıyor.

**Kanıt.** Kanıtı  $M = \mathbb{R}^n$  için yapalım.  $\phi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  gönderimi, verilen bir  $a \in U$  ve  $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$  için

$$\begin{cases} \frac{d\phi(a, t)}{dt} = X(\phi(a, t)) \\ \phi(a, 0) = a \end{cases} \quad (*)$$

ilk koşullu sistemin tek çözümüydü.  $s, t, s+t \in (-\epsilon, \epsilon)$  olmak üzere  $\phi(p, s+t)$  ve  $\phi(\phi(p, s), t)$  gönderimlerine bakalım.  $\phi(p, s+0) = \phi(p, s) = \phi(\phi_s(p), 0)$  olduğuna göre ve sistemin çözümü  $a = \phi(p, s)$  için tek olduğundan,

$$\phi(p, s+t) = \phi(\phi_s(p), t)$$

olmalı, yani daha güzel ifade edersek,

$$\phi_{s+t}(p) = \phi_t(\phi_s(p)) = \phi_t \circ \phi_s(p)$$

bulmuş olduk.  $s$  yerine  $-t$  koyarsak  $\text{br}_U = \phi_t \circ \phi_{-t}$  elde ederiz. Dolayısıyla her  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  için  $\phi_t$  bir difeomorfymiş, tersi de  $\phi_{-t}$  imiş.  $\square$

Yukarıdaki iki örnekte de bulduğumuz akış eğrileri zamanın belli değerlerinde çalışıyordu; çözümler zamanın tüm değerleri için akitilamıyordu. Şimdi bunu konu alan güçlü bir teoreme bakalım:

**Teorem 26.** Eğer  $X$ 'in sıfırdan farklı olduğu yerler ( $X$ 'in evi) tıksız bir kümenin içindeyse (örneğin  $M$  tıksızsa) Tüm  $p \in M$  ve tüm  $t \in \mathbb{R}$  için yukarıdaki (\*) denkleminde  $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  çözümü bulunabilir.

**Kanıt.** Bir önceki teoremin kanıtındaki  $U$  komşuluklarının sonlu tanesi  $\{U_i\}$ 'leri  $\text{ev}(X)$ 'i kaplayacak biçimde seçebiliriz.  $U_i$ 'lerde çalışan akış difeomorfilerini  $\phi_i$  olarak gösterelim.  $\phi_i$ 'lerin tanımlı oldukları ortak zaman aralığı  $(-\epsilon, \epsilon)$  olsun. Şimdi

$$\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad (p, t) \mapsto \begin{cases} \phi_i(p, t), & p \in U_i \\ p, & p \notin \cup U_i \end{cases}$$

gönderimine bakalım. Bu gönderim iyi tanımlı, çünkü  $p \in U_i \cap U_j$  olsa bile çözümün tekliğinden  $\phi_i(p, t) = \phi_j(p, t)$  olacak. Son olarak aşağıdaki gibi tanımlayacağımız  $\hat{\phi}$  işi bitirecek:

$$\hat{\phi} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad (p, t) \mapsto \phi_r \circ \phi_{\epsilon/2} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon/2}(p).$$

Burda  $\phi_{\epsilon/2}$ ,  $k$  kez yineleniyor ve  $r = t - k\epsilon/2$ . □

Bu dersi Morse kuramı için bir meyve toplayarak bitiriyoruz.

**Teorem 11'in kanıtı.**  $X$ ,  $f$  için gradyanımsı bir vektör alanı olsun.  $f^{-1}([a, b])$  kümesinde  $X(f)$  hiçbir noktada sıfır olamayacağından bu kümede  $Y = \frac{1}{X(f)}$  diye yeni bir alan tanımlayabiliriz.  $\gamma$  eğrisi,  $Y$  alanının bir  $p_0 \in f^{-1}(a)$  noktasından geçen akış eğrisi olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) &= D_f(\gamma(t)) \circ \frac{d\gamma}{dt}(t) \\ \gamma = (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow &= \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dx_i} \right) (f) \\ &= \left( \frac{d\gamma}{dt}(t) \right) (f) = Y(\gamma(t))(f) \\ &= \frac{1}{X(f)} X(f) \Big|_{\gamma(t)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur; yani  $f$ 'in herhangi bir akış eğrisi yönündeki *hız* sabit ve 1 imiş. Dolayısıyla  $\phi_{b-a}$ ,  $f^{-1}(a)$  kümesini  $f^{-1}(b)$  kümesine 1-1 örten biçimde götürür. Türevli topoloji,  $f^{-1}(a)$  kümesinin  $M$  içinde bir altmanifold olduğunu söylüyor [Mil1]. O zaman  $f^{-1}(a) \times [0, b-a]$  kenarlı, pürüzsüz bir altmanifolddur ve

$$\psi : f^{-1}(a) \times [0, b-a] \rightarrow f^{-1}([a, b]), \quad (x, t) \mapsto \phi_t(x)$$

gönderimi teoremden istenilen difeomorfi olacaktır. □

## Ders 10: Kulplar

Birçok teknik ve kuramsal zorluğu aştıktan sonra Morse kuramının güzel sonuçlarına yaklaştık. Bu derste Morse kuramı yardımıyla bir manifoldun *kulp* denen basit parçaların yapıştırılmasıyla elde edilebileceğini göreceğiz ([Mats], [GoSt]).

Önce yine teknik bir adımla başlayalım.

**Teorem 27.**  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Morse olsun.  $f$ 'ye istenildiği kadar yakın ve kritik değerleri birbirinden ayrı bir Morse fonksiyonu vardır.

**Kanıt.**  $p$ ,  $f$ 'nin bir kritik noktası ve  $U$  bunun etrafında bir Morse yaması olsun.  $f$ 'yi yalnızca  $U$ 'da hafifçe dürterek yeni bir  $f'$  Morse fonksiyonu yaratabileceğimizi, bu fonksiyonun kritik noktalarının  $f$ 'ninkilerle aynı olmasına karşın  $f'(p) \neq f(p)$  yapılabileceğini göstereceğiz.

$p \in K \subset L \subset U$  olacak biçimde  $K, L$  tıkkız kümeleri ve  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi|_K \equiv 1$ ,  $\text{ev}(\phi) \subset L$  koşullarını sağlayan bir şapka fonksiyonu alalım (Alıştırma 24).  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , mutlak değeri yeterince küçük bir sayı için  $f' = f + a\phi$  fonksiyonuna bakalım.  $M \setminus L$ 'de  $f' = f$  ve  $K$ 'de  $f' = a + f$ . Bu yüzden bu iki kümede  $f'$  ve  $f$ 'nin kritik noktaları aynı.  $f'$  fonksiyonunun  $K$ 'de tek bir kritik noktası var, o da  $p$ . Dolayısıyla  $f'$ 'nin yeni bir kritik noktası varsa ancak aradaki  $N = L \setminus \text{ic}(K)$  tıkkız kümesinde olabilir. Öyle bir  $c \in \mathbb{R}$  vardır ki  $N$  üzerinde

$$\left| \left( \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right| \leq c \left| \frac{\partial f'}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$$

sağlanır. Sağ taraf  $\left| a \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|$  değerinden küçüktür. Şapka fonksiyonunun birinci kısmi türevlerinin mutlak değerleri  $N$  üzerinde üstten bir  $\nu \in \mathbb{R}^+$  sınırlanabileceği için

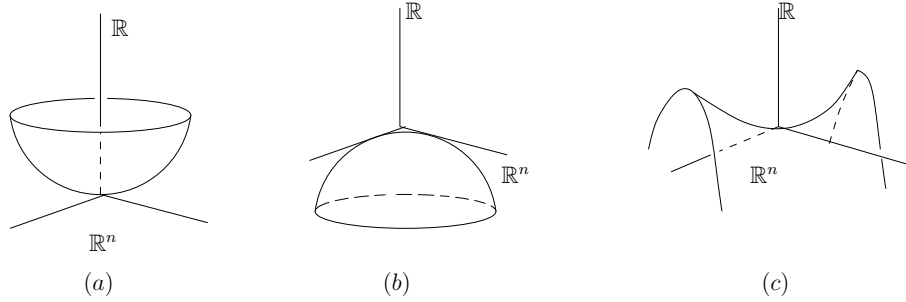
$$\left| \left( \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right| \leq |a| \nu \mu$$

buluruz. Buradan sonuca varıyoruz:  $N$ 'de  $\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$  alttan pozitif bir sayıyla sınırlanabilir.  $\sum \left( \frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)^2$  toplamı da  $N$ 'de sıfır olamaz. Dolayısıyla  $f'$ 'nin  $N$ 'de kritik noktası olamaz.  $\square$

### 10.1 Kulplara ayırma

Yukarıdaki teorem sayesinde kritik değerleri birbirinden ayrı Morse fonksiyonlarıyla uğraşarak devam ediyoruz.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  böyle bir fonksiyon olsun.

1.  $p$ , indisi 0 olan bir kritik nokta olsun. Morse yamasında fonksiyon  $f : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$  olacak. Böylece  $f$ 'nin grafiği Şekil 14(a)'daki gibi olacak. Burda  $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ , merkezi 0 olan ve  $\epsilon$  yarıçaplı bir top ve bu özel inşada buna  $n$  boyutlu 0-kulp diyoruz.



Şekil 14:

2.  $p$ , indisi  $n$  olan bir kritik nokta olsun. Morse yamasında fonksiyon  $f : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_n^2$  olacak. Böylece  $f$ 'nin grafiği Şekil 14(b)'ye benzeyecek. Burdaki  $B(0, \epsilon)$  topuna  $n$  boyutlu  $n$ -kulp diyoruz.
3.  $p$ , indisi  $k$  olan bir kritik nokta olsun ( $0 < k < n$ ). Morse yamasında fonksiyon  $f : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$  olacak.  $f$ 'nin grafiği Şekil 14(c)'yi andıracak ( $p$  eğer noktası). Bu şekildeki yüzeyi yavaş yavaş suya batırın.  $p$  noktası suya batmadan bir az önce suyun üstünde kalan noktalar kümesine  $n$  boyutlu  $k$ -kulp diyoruz.

Bu adlandırmalara matematiksel olarak açıklık getirip bir anlam verelim.  $0 < \delta \ll \epsilon$  olsun.  $B(0, \epsilon)$  Morse yaması içinde  $f = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq -\delta < 0$  eşitsizliğini sağlayan noktalar ( $A_\delta$ ) yani yüksekliği  $-\delta$ 'dan az olanlar, Şekil 15'de leylak rengiyle gösterilmiş. Kulpun içinde olup da yüksekliği  $-\delta$ 'dan fazla ve  $\delta$ 'dan az olanlarsa yine Şekil 15'da mavi tonuyla gösterilmiş:

$$F_\delta : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq \epsilon, \quad -\delta \leq -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq \delta$$

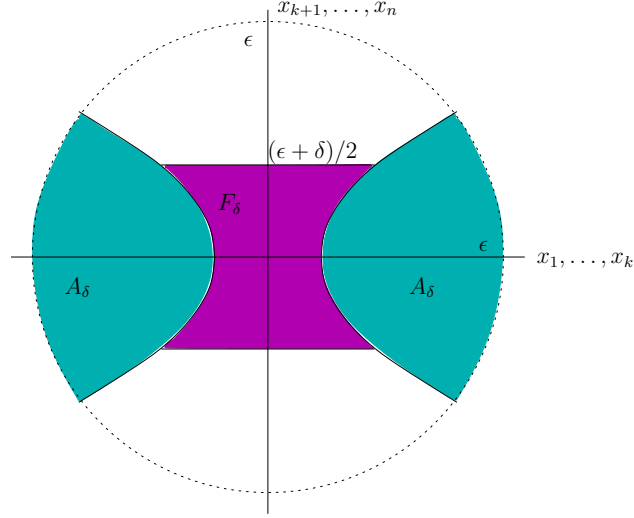
**Tanım 19.**  $\epsilon$  yarıçaplı bir Morse yaması içinde yukarıdaki eşitsizlikleri sağlayan noktaların kümesine  $n$  boyutlu  $k$ -kulp denir.

**Alıştırma 34.** Bu tanımın, yukarıda 1. ve 2.'de tarif edilen 0- ve  $n$ -kulplarla aynı şeyi anlattığını gösterin.

İlk ve son eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,  $F_\delta$ 'daki noktaların

$$x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq (\epsilon + \delta)/2$$

eşitsizliğini sağlaması gerektiğini görürüz. Dolayısıyla bir  $k$ -kulpun son  $n - k$  noktası,  $n - k$  boyutlu bir kapalı toptan ( $D^{n-k}$ ) gelmeli. Kulpun içinde  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  eşitliklerini sağlayan noktalara kulpun *kulcuğı* diyoruz.  $F_\delta$ 'nın eşitsizliklerine yerleştirince  $x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq \delta$  buluruz. Demek ki kılçık  $D^k$ 'ye homeomorf.



Şekil 15:

**Alıştırma 35.**  $n$  boyutlu bir  $k$ -kulpun  $D^k \times D^{n-k}$ 'ye homeomorf olduğunu gösterin.

Bir  $k$ -kulpunu  $D^n$  yerine ısrarla  $D^k \times D^{n-k}$  yazmamızın bir nedeni var.  $k$ -kulp  $F_\delta$ , manifoldun daha aşağıdaki noktalarından oluşuk  $A_\delta$  kümesine,  $(\partial D^k) \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$ 'ya homeomorf bir bölgede yapışıyor.

**Alıştırma 36.**  $A_\delta \cap F_\delta$  kümesini koordinatlar cinsinden bulun.

Son olarak, Alıştırma 35'ün savından daha güçlü bir sav doğru. Eğer  $F_\delta$ 'nin köşelerini yumuşatırsak bir  $k$ -kulpu  $D^n = D^k \times D^{n-k}$  topuna difeomorf yapabiliriz (asıl kaynak için [GoSt] ya da [Mats]'a bakın). Bu durumda şu da doğru olacaktır:

**Sav 28.**  $f^{-1}(-\infty, -\delta] \cup k$ -kulp,  $f^{-1}(-\infty, +\delta]$ 'ya homeomorftur. Köşeler yumuşatıldıktan sonra bu manifoldlar difeomorftur.

Bu savın ilk kısmı neredeyse bariz, kanıtı atlayıp gelecek dersteki örneklere doğru ilerleyelim. Bu derste şuna ikna olduk: kapalı (yani tıkız ve kenarsız), bağlantılı ve pürüzsüz bir manifold, üstündeki bir Morse fonksiyonunun kritik noktaları sayısı kadar kulpun birbirine yapıştırılmasıyla inşa edilebilir. Bir  $k$ -kulpu daha öncekilerin oluşturduğu manifoldun kenarına  $\partial(D^k) \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$  boyunca yapıştırılır.

# Ders 11: Örnekler

## 11.1 Kulplarla inşalar

Bu bölümde kulpları birbirine yapıştırıp tanıdık manifoldlar elde edeceğiz. Artık bu son ders. Özellikle dersin ikinci bölümünde son meyveleri toplamak adına koşarak ve boşluklar bırakarak ilerleyelim.

$S^n$ :  $n$ -küre.  $n$  boyutlu küre bir 0- ve bir  $n$ - kulpun yani iki yarıkürenin birbirine yapıştırılmasıyla elde ediliyor (Alıştırma 16).  $g_n : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto x_n$  bir Morse fonksiyonu.

$S^n \times S^m$ . Bu çarpım manifoldunu  $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$  içinde düşünelim. Bir önceki örnekteki fonksiyondan esinlenerek ve  $g_n$  ve  $g_m$  fonksiyonlarını kullanarak

$$G = (g_n + A, g_m + B) : S^n \times S^m \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m) \mapsto (x_n + A)(y_m + B)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burda  $A, B > 1$  reel sayıları, kritik değerleri birbirinden ayrı elde etmek için kondu (aşağıdaki hesaba bakın). Şimdi,

$$(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

yamasında bu fonksiyon

$$G : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mapsto (\sqrt{1 - \sum x_i^2} + A)(\sqrt{1 - \sum y_j^2} + B)$$

olarak verilir. İfadeyi kısaltmak için  $u = \sqrt{1 - \sum x_i^2}$  ve  $v = \sqrt{1 - \sum y_j^2}$  yazıp türevi hesaplayınca

$$Dg(p) = \left( -\frac{x_1}{u}(v + B), \dots, -\frac{x_n}{u}(v + B), -\frac{y_1}{v}(u + A), \dots, -\frac{y_m}{v}(u + A) \right)$$

buluruz. Bu yamada bu türevi sıfır yapan tek bir nokta var:  $x_1 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_m = 0$ . Bu nokta  $S^n \times S^m$ 'de  $((0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, 1))$  noktasına karşılık geliyor.

**Alıştırma 37.** Başka yamalarda çalışarak  $G$  fonksiyonunun toplam dört kritik noktası olduğunu gösterin:  $p_{\pm\pm} = ((0, \dots, 0, \pm 1), (0, \dots, 0, \pm 1))$

Bu kritik noktalarda Hessian matrisi

$$\begin{aligned} H_G(p_{\pm\pm}) &= \begin{pmatrix} (\pm v + B)H_n(p_{\pm\pm}) & 0 \\ 0 & (\pm u + A)H_m(p_{\pm\pm}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\pm 1 + B)H_n(p_{\pm\pm}) & 0 \\ 0 & (\pm 1 + A)H_m(p_{\pm\pm}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Burda  $H_i, g_i$  fonksiyonunun Hessian matrisiydi ( $i = n, m$ ).  $A, B > 1$  olduğundan Hessian hiçbir kritik nokta için tekil değildir ve indisi  $H_n$  ve  $H_m$ 'ninkinin toplamıdır. Dolayısıyla  $S^n \times S^m$  manifoldu,  $n+m$  boyutlu dört kulpla inşa edilir: 0-kulp,  $n$ -kulp,  $m$ -kulp ve  $(n+m)$ -kulp.

$\mathbb{R}P^n$ :  $n$  boyutlu reel izdüşümsel uzay.  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  kümesinde,  $\mathbb{R}^{n+1}$ 'in aynı 1 boyutlu doğrusal altuzayında olma denklik bağıntısını düşünelim ve  $\sim$  diye gösterelim.  $\mathbb{R}P^n$  uzayı,  $\mathbb{R}^{n+1}/\sim$  bölüm uzayı olarak tanımlanır. Küme olarak  $\mathbb{R}^{n+1}$  vektör uzayının 1 boyutlu altuzayları kümesidir.  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  noktasının  $\sim$  altında denklik sınıfını  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$  olarak gösterelim.  $\mathbb{R}P^n$  için bir yama

$$h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow U_j \subset \mathbb{R}P^n, (x_0, x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : 1 : \dots : x_n]$$

olarak alınabilir. Burda  $\hat{x}_j$  gösterimi,  $x_j$ 'nin atlanmış olduğunu kastediyor.  $U_j$  yamaları ( $j = 0, \dots, n$ ), tüm  $\mathbb{R}P^n$ 'yi kaplar.<sup>6</sup>

$\mathbb{R}P^n$  üzerinde bir Morse fonksiyonu tanımlıyoruz.  $0 < a_0 < \dots < a_n$  reel sayıları alalım.

$$f : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}, [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \frac{\sum a_i x_i^2}{\sum x_i^2}$$

olsun.  $x_0 = 1$  yamasında bu fonksiyon

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{a_0 + \sum_1^n a_i x_i^2}{1 + \sum_1^n x_i^2}$$

biçiminde çalışır. Türevini hesaplayalım. Yukarıda payda  $u$  pay  $v$  diyerek,

$$j = 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{2a_j x_j}{u} - \frac{2x_j v}{u^2} = \frac{2x_j}{u^2} (a_j - a_0 + \sum_{i \neq j} (a_j - a_i) x_i^2)$$

buluruz. Tüm bu türevleri sıfır yapmalıyız.  $j = n$  durumunda  $a_n$  her  $a_i$ 'den büyük olduğu için  $x_n = 0$  olmalı.  $j$ 'yi teker teker azaltarak, her  $i = 1, \dots, n$  için  $x_i = 0$  buluruz. Bu noktaya karşılık gelen  $\mathbb{R}P^n$  noktası  $[1 : 0 : \dots : 0]$  olur. Bu nokta bu yamadaki tek kritik nokta.

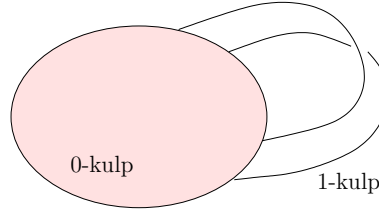
**Alıştırma 38.** Tüm  $n+1$  tane yamada benzer hesabı yaparak,  $f$ 'nin  $n+1$  kritik noktası olduğunu gösterin. Hessian matrislerini hesaplayarak bu noktaların dejenere olmadığını, indislerinin de  $0, 1, \dots, n$  olduğunu kanıtlayın.

Demek ki  $\mathbb{R}P^n$ ,  $n+1$  tane kulpla inşa ediliyor; her  $k = 0, \dots, n$  için bir  $k$ -kulp var.

$\mathbb{R}P^2$ : Reel izdüşümsel düzlem. Yukardaki örnekte olanları izdüşümsel düzlem durumunda rahatça görüyoruz.  $\mathbb{R}P^2$ , üç kulpla inşa ediliyor. 0-kulp  $D^2$ 'den başka bir şey değil. Bir 1-kulp  $D^1 \times D^1$ . Bunu 0-kulpa  $\partial(D^1) \times D^1 = \{*, *\} \times D^1$  boyunca, yani ayrık iki aralık ile yapıştıracağız. Nasıl yapıştırılacağı yukarıdaki örnekteki benzer bir analizle keşfedilebilir ama biz bunu şimdilik atlayıp Şekil 16'deki gibi olduğunu ve böylece Möbius şeridinde homeomorf bir manifold elde edileceğini söylemekle yetinelim. 2-kulpu bu şeride  $\partial(D^2) \times D^0 = S^1$  boyunca yapıştıracağız.  $\mathbb{R}P^2$  böylece elde edilen kapalı bir yüzey olacak. İçinde bir Möbius şeridi olduğu için yönü olmayan bir yüzey olacak.

<sup>6</sup>Bu konulara kolay bir giriş için Ferit Öztürk'ün İzdüşümsel Geometri açık ders notlarına bakılabilir, <http://www.math.boun.edu.tr/instructors/ozturk/yaz10m477/math477.htm>





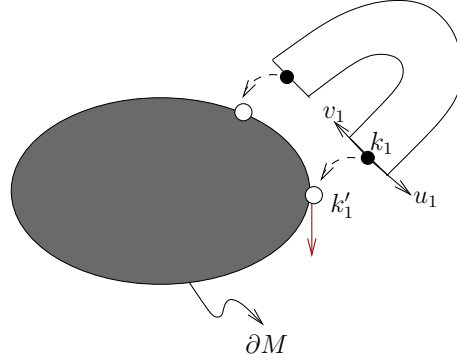
Şekil 16:

## 11.2 Yapıştırma örnekleri

Dersin başında manifoldları kulplara ayırma örnekleri verdik. Son örnekte 2 boyutlu bir 0-kulpla bir 1-kulpu yapıştırmamız gerekti. Sezgisel olarak bunu iki biçimde yapabiliriz. Yapıştırma sonucu topolojik olarak ya bir halka ( $S^1 \times I$ ) elde ederiz ya da Şekil 16'de olduğu gibi bir Möbius şeridi. Şimdi bu olgu üstüne düşünelim. Birkaç tanım:  $n$  boyutlu bir  $k$ -kulp için  $\partial(D^k) \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$ , *yapıştırma bölgesi* olarak adlandıralım. Bu bölgede kılçığın noktaları kümesine yani  $S^{k-1} \times \{0\}$  kümesine *yapıştırma küresi* diyelim

**2 boyutlu 1-kulp:**  $D^1 \times D^1$ . Daha önce inşa edilmiş 2 boyutlu bir  $M$  manifoldunun kenarına bir 1-kulp yapıştıracamız. Şekil 17'de bunu nasıl yapabileceğimiz görülüyor. 1-kulpun yapışacak kenarı ayrık iki aralık idi; bunlar  $D_1^1$  ve  $D_2^1$  olsun. Bu aralıkların her birinde kılçığın tek bir noktası var; bunlar da  $k_1$  ve  $k_2$  olsun; yani bu durumda yapıştırma küresi =  $\{k_1, k_2\}$ . Yapıştırma işleminde aslında şunu yapıyoruz: önce her bir  $k_i$ 'yi  $\partial M$ 'ye yapıştırıyoruz. Sonra bu noktada  $D_i^1$ 'in teğet uzayının  $k_i$ 'ye dik vektörlerini nasıl yapıştıracamız seçiyoruz.  $D_i^1$ 'in diğer noktaları da böylece yapışıyor. Dolayısıyla bizim bu dik vektörleri kaç biçimde yapıştırabileceğimize bakmamız lazım.  $T_{k_i} D_i^1$  uzayında  $k_i$ 'ye dik vektörler uzayının boyutu  $2 - 1 - 0$ . Burada 1 çıkarmamızın nedeni kulpun kenarının boyutunu bulmak, 0 çıkarmamızın nedeniyse  $k_i$ 'ye (yapıştırma küresine) dik olanların boyutunu bulmak (Tamamen gereksiz bir hesap yaptığımızı düşünebilirsiniz, sabırlı olun). Bu dik vektörleri yapıştırma seçimini şöyle yapıyoruz: dik vektörler uzayına ortogonal bir taban seç, bunu karşıdaki tabana gönder. Şekil 17'de bu seçim şu soruya yanıt oluyor: karşıdaki kırmızı vektöre  $u_1$  mi  $v_1$  mi yapışsın? Dolayısıyla  $O(1)$  grubundan bir eleman seçmeliyiz. Yaptığımız iki seçim  $O(1)$ 'de birbirine yol bağlantılıysa gösterilebilir ki yapıştırma sonucu oluşan manifoldlar da birbirine homeomorf. Yani bizim  $O(1)$ 'in bağlantılı parça sayısına,  $\pi_0(O(1))$ 'e bakmamız gerek.  $\pi_0(O(1)) = \mathbb{Z}^2$  olduğundan yapıştırma sonucu birbirinden farklı iki manifold elde edebiliriz. Bunlardan biri halka diğeri Möbius şeridi.

**$n$  boyutlu 1-kulp:**  $D^1 \times D^{n-1}$ . Değişen pek bir şey yok. Yapıştırma bölgesi şimdi  $\partial(D^1) \times D^{n-1} = \{*, *\} \times D^{n-1}$  olacak. Yine kılçığın bu bölgede yalnızca iki noktası var. Dik vektörlerini nasıl yapıştıracamız seçsek yetiyor. Dik vektörler uzayının boyutu  $n - 1 - 0$ . Dolayısıyla yapıştırmayı belirleyebilmek için  $O(n-1)$  grubundan bir eleman seçmeliyiz, yani sonuçta  $O(n-1)$ 'in bağlantılı parça



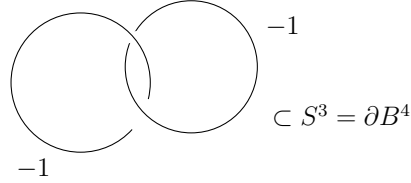
Şekil 17: 2 boyutlu 1 kulpu yapıştırırken bir seçim gerekiyor.

sayısına,  $\pi_0(O(n-1))$ 'e bakmalıyız. Ama her  $n > 1$  için  $\pi_0(O(1)) = \mathbb{Z}^2$  olduğundan bir 1-kulpu yapıştırmanın her boyutta iki yolu var. Gösterilebilir ki bunlardan biri yönlü diğeri yönü olmayan manifoldlar üretiyor.

4 boyutlu 2-kulp:  $D^2 \times D^2$ . Şimdi yapıştırma küresi  $S^1 \times \{0\}$ . Yani önce bu çemberi yapıştıracağız, sonra çember boyunca dik vektörlerin nasıl yapışacağına karar vereceğiz. Dik vektörlerin uzayı  $4-1-1$  boyutlu. Burada ikinci 1, yapıştırma küresinin boyutu. Şimdi  $S^1$  boyunca  $S^1$ 'e dik bir ortogonal taban silsilesi seçmeliyiz. Demek ki seçimlerimiz  $O(2)$ 'den olmalı. Bir noktada tabanı standart seçersek (yani  $O(2)$ 'den  $I$  birim matrisini seçersek) birim gösterilebilir ki homotopik seçimleri bir tutarak  $\pi_1(O(2), I)$  kadar seçeneğimiz var. Bu grup da  $\mathbb{Z}$ 'den başka bir şey değil.

Dolayısıyla, 4 boyutlu bir 2-kulp yapıştırmak için

- (1) kulpun kılçığının nereye yapışacağını seçmek gerekiyor, yani  $S^1$ 'in  $\partial M$  içindeki görüntüsünü seçmek, yani bir düğüm seçmek.
- (2) Sonra  $S^1$  boyunca bir dik taban silsilesi seçmek gerek. Ama gördük ki bu seçim  $\mathbb{Z}$ 'nin bir elemanını seçmeye denk. Seçilen her tamsayının geometrik anlamı aşikar: bu sayı,  $S^1$ 'i düğüme yapıştırırken  $S^1$ 'e dik yönün düğüme dik yöne göre kaç kez dolacağını sayıyor.



Şekil 18: Bu çemberlere birer tane 2-kulp yapışacak. Çıkan manifoldun kenarı  $\mathbb{R}P^3$ .

Şekil 18 şunu anlatıyor:  $M = D^4$ ,  $\partial M = S^3$  olsun.  $S^3$ 'te resimde görünen düğümleri seçtim (düğüm olmamış ama birbirine düğümlü). İki tane 2-kulpun kılçığını bunlara yapıştır. Yapıştırma sırasında herbir kılçığa dik vektörler düğüme dik vektörlere göre (sağ el kuralına göre)  $-1$  kez dönsün. Resimde böylece inşa edilen kenarlı 4-manifoldun  $\mathbb{R}P^3$ 'e homeomorf olduğu gösterilebilir. Dersi bitirelim, sınırlarımı çoktan aştık. Bunlar başka bir dersin konusu olabilir.

## Alıştırmalara yanıtlar

*Alıştırma 7.* Derste tanımlanan yama kürenin yalnızca  $\{z \in S^2 : z > 0\}$  kısmını parametrize etmekte. Yapmamız gereken şey bütün küreyi böyle yamalarla örtmek. Önce  $\varphi_- : D^2 \rightarrow S^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$  parametrizasyonuna bakalım. Bu durumda yükseklik fonksiyonunun kordinatlarda ifadesi ve kritik noktalarını hesaplırsak

$$f \circ \varphi_- = (x_1, x_2) \mapsto -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$$

ve

$$D(f \circ \varphi_-) = \left( \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \right)$$

buluruz. Türevin 0 değerini aldığı tek nokta olan  $(0, 0)$  noktasında Hessian'ı hesaplayalım:

$$H(f \circ \varphi_-)(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1-x_2^2}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}}} & \frac{x_2 x_1}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}}} \\ \frac{x_2 x_1}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}}} & \frac{1-x_1^2}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)^{3/2}}} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Henüz kürenin hepsini parametrize etmiş olmadık ama. şu an kürenin ekvatorunu oluşturan çember az önce tanımladığımız açık komşulukların hiçbirini tarafından kapsanmıyor. Aslında bir küreyi bu tür parametrizasyonlarla tam olarak kaplayabilmek için 6 adet komşuluğa ihtiyacımız var:  $z^+$  yarımküresi,  $z^-$  yarımküresi,  $y^+$  yarımküresi,  $y^-$  yarımküresi,  $x^+$  yarımküresi,  $x^-$  yarımküresi. Bu parametrizasyonlardan birine bakalım:  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2, (x_1, x_3) \mapsto (x_1, \sqrt{1-x_1^2-x_3^2}, x_3)$ . Bu  $y^+$  yarımküresinin parametrizasyonudur ve bu parametrizasyonda yükseklik fonksiyonu ve Jacobian'ı

$$f \circ h = (x_1, x_3) \mapsto x_3, \quad D(f \circ h) = (0 \ 1)$$

olur.

Dolayısıyla bu parametrizasyonda yükseklik fonksiyonunun hiçbir kritik noktası görünmüyor beklendiği gibi, çünkü bu yama  $(1, 0, 0)$  ve  $(0, 0, 1)$  noktalarını içermez. Diğer yarımkürelerin parametrizasyonu da aynı sonucu verecektir. Ayrıca  $S^2$ 'nin pürüzsüz bir manifold yapısı olduğunu göstermek için parametrizasyonlar arasında geçiş fonksiyonlarının da gıcır olduğunu göstermemiz gerekir. Tanımladığımız parametrizasyon fonksiyonlarının tersi kullandığımız düzlemlere (stereografik) izdüşüm şeklinde. Dolayısıyla yapılması gereken tek şey parametrizasyon düzleminde küreye fonksiyon ile çıkmak sonra geçiş yapmak istediğimiz komşuluğa uygun seçeğimiz izdüşüm fonksiyonu ile parametrizasyon düzlemine geri gitmek. İzdüşüm fonksiyonu ve parametrizasyon fonksiyonu gıcır olacağından, geçiş fonksiyonu da gıcır olacak. Kürenin Hausdorff ve sonlu açık kümeyle kaplanabilir olması ise  $\mathbb{R}^3$ 'ten gelen topolojisinde barizdir.

*Alıştırma 8.* Birim küre için diğer bir olası parametrisasyon küresel kordinatların  $\theta$  ve  $\phi$  açısını kullanmak. Bu durumda tek bir fonksiyon ve değişik komşuluklar seçilerek  $S^2$  parametrize edilebilir. Herbir yama için fonksiyonları  $h_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 : (\theta, \phi) \mapsto (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$  alalım. Bu durumda komşulukları  $U_1 = (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$ ,  $U_2 = (0, 2\pi) \times (\pi/2, \pi)$ ,  $U_3 = (0, \pi) \times (0, \pi)$ ,  $U_4 = (\pi, 2\pi) \times (0, \pi)$ ,  $U_5 = (3\pi/2, \pi/2) \times (0, \pi)$ ,  $U_6 = (\pi/2, 3\pi/2) \times (0, \pi)$  olarak seçebiliriz. Parametrizasyon fonksiyonunun tersi  $h^{-1} : h(U_i) \subset S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (\arctan(y/x), \arccos z)$  şeklinde verilen gıcır bir fonksiyon olduğu için  $S^2$  üzerine pürüzsüz bir manifold yapısı kurmaya yeterlidir.

Bu durumda yükseklik fonksiyonunun herhangi bir komşulukta ifadesi ve Jacobian'ını

$$f \circ h_i = (\theta, \phi) \mapsto \cos \phi, \quad D(f \circ h_i) = (0 \quad -\sin \phi)$$

buluruz. Dolayısıyla yükseklik fonksiyonunun kritik noktaları  $\sin \phi = 0$  eşitliğini sağlamalı yani kürenin kuzey ve güney kutupları  $\phi = 0$ ,  $\phi = \pi$  kritik noktalar olmalı. Bu alıştırma, metindeki tartışmayla birlikte, kritik noktaların parametrisasyondan bağımsız olduğuna işaret ediyor.

*Alıştırma 10.* Simit,  $T^2 = S^1 \times S^1$  olarak düşünülebilir. Varsayalım ki ilk çemberin yarıçapı  $a$ , diğerinin  $b$  olsun. Sabit çemberin açısı  $\theta$  diğeri üzerinde döndürülen çemberin açısı da  $\phi$  olsun.  $\phi$  açısı için  $\phi = 0$  simitin tepesine,  $\phi = \pi$  ise simitin dibine gelecek şekilde düşünelim (Şekil 19). O zaman istediğimiz parametrisasyon fonksiyonu

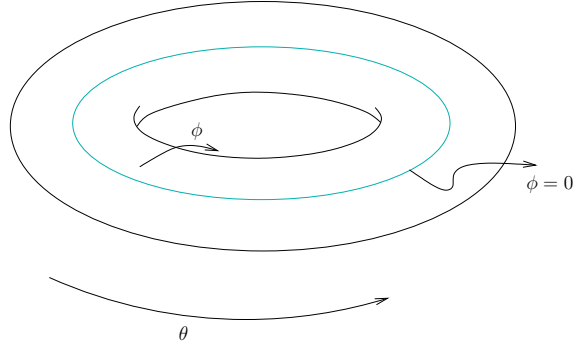
$$f : (\theta, \phi) \mapsto (a \cos \theta + b \sin \phi \cos \theta, a \sin \theta + b \sin \phi \sin \theta, b \cos \phi)$$

olacak. Simidin bir noktasının  $z$  değerinin  $b \cos \phi$  olduğunu görmek kolay.  $x$  ve  $y$  değerlerini görmek içinse önce  $(0, 0, 0)$  noktasından simit üzerindeki herhangi bir noktaya bir vektör çizin. Simide tepeden baktığımız zaman bu vektörün boyu  $(a + b \sin \phi)$  olacağından bunların  $x$  ve  $y$  eksenlerine izdüşümünü bulmak kolay. Son olarak Alıştırma 8'in çözümünde küreye yaptığımız gibi, simidi kaplayacak komşuluklar bulmamız lazım. Bu durumda dört tane komşuluk yeterli olacaktır:  $U_1 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ ,  $U_2 = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ ,  $U_3 = (-\pi/2, 3\pi/2) \times (0, 2\pi)$  ve  $U_4 = (-\pi/2, 3\pi/2) \times (-\pi, \pi)$ .

O zaman koordinatlarda yazılmış yükseklik fonksiyonu ve Jacobian'ı

$$h : (\theta, \phi) \mapsto b \cos \phi, \quad J = (0 \quad -b \sin \phi)$$

olur. Dolayısıyla Jacobian'ın sıfır değerini aldığı yerler  $\phi = 0$  ve  $\phi = \pi$  noktaları yani simidin tepesi ve dibi oluyor (Şekil 19). Hessian matrisini de  $\phi = 0$  noktalarında  $H_{11} = -1$  ve diğer girdileri sıfır olan,  $\phi = \pi$  noktalarındaysa  $H_{11} = 1$  ve diğer girdileri sıfır olan bir matris olarak buluruz. Kürede yaptığımız yorumu simide de yaparsak, simidin tepesine bir su damlası bıraktığımız zaman sadece tek bir taban vektörü yönünde aşağı doğru akabilir, diğer yönde hareket edemez, simidin tepesinde kalır. Küreden farklı olarak bir tane sıfırdan farklı ve bir tane de sıfır köşegen girdisinin sonucudur bu.



Şekil 19:

*Alıştırma 11.* İpucu: Sonsuz tane kritik nokta alın. Bunlar yalıtılmış oldukları için etraflarında birbiri ile kesişmeyen açık komşuluklar vardır. Daha sonra dışarısını da uygun bir biçimde açık komşuluklarla kaplayıp bunun sonlu bir açık alt örtüsü olmadığını gösterin.

Plan, sonsuz tane birbirinden yalıtılmış kritik nokta etrafında aldığımız kesişmeyen açık kümeleri bir tıkkız topolojik uzay içersine sığdıramayacağımızı göstermek.  $M$  tıkkız topolojik bir uzay,  $\{p_\alpha\}$  da kritik noktalar kümesi olsun. Bunlar yalıtılmış olduğu için herbiri etrafında diğer hiçbir kritik noktayı içermeyen  $U_\alpha$  açık kümeleri alalım. Bunlar açık örtünün ilk üyeleri. Şimdi kalan  $M \setminus (\cup U_\alpha)$  kısmını dikkatli bir şekilde kaplayacağız. Her açık  $U_\alpha$  kümesinin içersinde kritik noktaların etrafında içeri boş küme olmayan (niye?)  $V_\alpha$  kapalı kümesi alabiliriz.  $V_\alpha$ 'ların içlerinin birleşiminin kapanışına  $S$  diyelim.  $M \setminus S$  açıktır ve  $M \setminus \cup U_\alpha$  kümesini kapsar. Artık  $\{S\} \cup \{U_\alpha\}$ ,  $M$  için bir açık örtü olur. Fakat bu açık örtü içersinde  $\{U_\alpha\}$ 'lardan hiçbirini çıkaramayacağımız için  $M$ 'nin tıkkız olmasıyla çelişiriz.

*Alıştırma 17.* İpucu: Bu manifold üzerinde Morse olan bir fonksiyon tanımlayıp, Teorem 11'i kullanarak bu manifoldun  $f^{-1}(a) \times [a, b]$ 'ye difeomorf olduğunu gösterin. Bu yüzeyin silindir ile ilişkisinin görmek için düzlemi tanımlayan denklemleri yazıp, bu denklemleri çözerek çember denkleminde benzer denklemler elde etmeyi deneyin.

$z_1 = (x_1, y_1)$  ve  $z_2 = (x_2, y_2)$  olsun. O zaman sorudaki koşulu sağlayan kompleks sayıların oluşturduğu  $A$  yüzeyi şu iki denklem tarafından belirlenir:

$$(i) h(z_1, z_2) = x_1x_2 - y_1y_2 = 1, \quad (ii) g(z_1, z_2) = x_1y_2 + x_2y_1 = 0.$$

Bu denklemler bize  $\mathbb{C}^2$  içersinde 2 boyutlu bir  $A$  yüzeyi verecek. Öncelikle ilersi için lazım olacak bir koşulu şimdiden fark etmekte yarar var. Eğer  $x_1 = 0$  olursa bu  $x_2y_1 = 0$  ve  $y_1y_2 = -1$  demek olacak; bu da  $x_2 = 0$  ve  $y_1 \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$  koşulunu doğuracak. Dolayısıyla  $x_1 = x_2 = 0$  olduğu durumda  $y_1$  ve  $y_2$  sıfır olamayacak. Aynı şekilde  $y_1 = y_2 = 0$  olduğundaysa  $x_1$  ve  $x_2$  sıfır olamayacak.

Şimdi  $A$ 'nın bir silindire nasıl homeomorf olabileceği hakkında sezgi edinmek için denklem (ii)'yi çözüp (i)'in içine koymayı deneyelim:

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 : y_2 = -x_2y_1/x_1$$

$$y_1 \neq 0, y_2 \neq 0 : x_2 = -x_1 y_2 / y_1$$

olacak. Paydaların birlikte sıfır olduğu bir durum olamayacağı için yalnızca bu iki denklem bize yeterli. Bunları denklem (i)'in içine koyarsak sırayla elde edeceğimiz denklemler:

$$(iii) x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 : x_1^2 + y_1^2 = x_1/x_2, \quad (iv) y_1 \neq 0, y_2 \neq 0 : x_1^2 + y_1^2 = -y_1/y_2.$$

Bunlar düzlemde çember denkleminde oldukça benziyor. Ayrıca burda fark ettiğimiz bir koşul da  $y_1$  ve  $y_2$ 'nin işaretlerinin birbirinden farklı olması gerektiği çünkü (iv)'ün sol tarafı her zaman pozitif. Şimdi öyle bir  $f$  fonksiyonu tanımlamalıyız ki bir  $c \in \mathbb{R}$  için  $f^{-1}(c)$  ve yukardaki denklemlerle tarif edilen kümelerin kesişimi bize bir çember vermeli. Aynı zamanda Teorem 11'i kullanabilmemiz için, yani elimizdeki  $A$  yüzeyini  $S^1 \times [a, b]$  olarak ifade edebilmek için  $f$ 'nin yüzey üzerinde kritik noktası olmaması lazım. (iii) ve (iv)'e bakınca iki tane aday makul gözülebilir; birincisi  $f(z_1, z_2) = x_2 - x_1$ , diğeri ise  $f(z_1, z_2) = x_2 x_1$ . Bu iki fonksiyonun da bir  $c$  için geri görüntüsünün yukardaki yüzeyle kesişimi bize çember verecek; bunu en aşağıda göreceğiz. Şimdi  $f(z_1, z_2) = x_2 - x_1$  fonksiyonunun yüzey üzerinde kritik bir noktası olmadığını göstereceğiz. Bunun için bir kaç yol var. Bunlardan biri yüzeyi parametrize etmek ve fonksiyonun Jacobian'ını incelemek. Ama zaten amacımız yüzeyin  $S^1 \times [a, b]$  manifolduna difeomorf olduğunu göstermek. Dolayısıyla bu sefer daha önceki derslerde bahsettiğimiz bir yolu kullanacağız. Eğer  $f$ 'nin bu yüzey üzerinde kritik noktası varsa orada  $f$ 'nin bir sabit değer yüzeyi,  $A$ 'ya teğet olmalı. Bunun olması için öyle bir  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$  olmalı ki

$$\alpha \nabla h + \beta \nabla g = \gamma \nabla f \Leftrightarrow \alpha(x_2, -y_2, x_1, -y_1) + \beta(y_2, x_2, y_1, x_1) = \gamma(-1, 0, 1, 0)$$

sağlansın. Bu denklemleri çözdüğümüz zaman  $y_2 = -y_1 = -\frac{\gamma\beta}{\beta^2 + \alpha^2}$  ve  $x_2 = -x_1 = \frac{\gamma\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}$  buluruz. Ama bu  $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$  denklemini ancak  $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$  için sağlayabilir bu da olası değil. Dolayısıyla  $f$  fonksiyonunun bu yüzey üzerinde hiçbir kritik noktası yoktur.

Şimdi  $f$  fonksiyonunun bir değer için geri görüntüsüne bakıp bunun bir çember olduğu görülmeli. Size bırakıyoruz.

*Alıştırma 23.* Şu teoremleri kullanın: *Yerel olarak tıkHz kümeleri tıkHz kümeler içersine gömmek mümkündür. Hausdorff uzaylarda bir nokta ve bir tıkHz kümeyi ayıran ve kesişmeyen iki açık küme vardır. Hausdorff tıkHz uzayların kapalı alt kümeleri tıkHzdır. Her tıkHz küme kapalıdır.*

Bizim çalıştığımız manifoldlar topolojik olarak Hausdorff ve yerel olarak  $\mathbb{R}^n$ 'ye homeomorf oldukları için, yerel olarak da tıkHzdırlar, dolayısıyla bu teorem manifoldlar için de geçerlidir. Bu soruyu çözerken bir teorem kullanacağız.  $M$  Hausdorff ve yerel olarak tıkHz bir uzay olsun. O zaman bu uzayı öyle tıkHz bir uzay  $\dot{M}$  içersine gömebiliriz ki  $\dot{M} \setminus M$  tek bir noktadan oluşan bir küme olur. Bu  $\dot{M}$  uzayına  $M$ 'nin *tek nokta ile tıkHzlaştırılması* denir

Şimdi  $p \in M$  ve  $U \subset M$ ,  $p$  etrafında açık bir küme olsun. Amacımız bu açık küme içersinde kapanışı tıkHz olan başka bir açık küme bulmak. Öncelikle,  $K = \dot{M} \setminus U$  kapalı bir kümedir. TıkHz Hausdorff uzaylarda kapalı alt kümeler

tıkız olduğu için  $K$  tıkızdır. Hausdorff uzaylarda bir nokta ve tıkız bir kümeyi birbirinden ayıran ve kesişmeyen iki tane açık küme bulunabilir. O zaman  $p$ 'yi ve  $K$ 'yi içeren ayrık açık kümeler sırasıyla  $W$  ve  $Y$  olsun.  $W \subset M$  olduğu için kapanışı  $\overline{W}$  tıkızdır. Öte yandan  $W$  ve  $Y$  ayrık kümeler olduğu için de  $\overline{W}$ ,  $K$  ile kesişmez. Dolayısıyla  $\overline{W} \subset U$ .

*Alıştırma 24.* İpucu:  $e^{-1/t}$  tarzı bir fonksiyon kullanın.

Bu fonksiyonu analitik bir şekilde inşa etmemiz mümkün değildir çünkü bir komşuluk içerisinde her yerde sıfır değerini alan bir fonksiyon, analitikliğinden gelen seri açılımı nedeniyle komşuluğun çevresinde ve böyle böyle tanımlı olduğu her yerde sıfır değerini almak zorunda kalacaktır. Ama manifoldumuz analitik olmadığı zaman şapka fonksiyonu gerçel değerli  $e^{-1/x}$  veya  $e^{-1/(1-x^2)}$  gibi fonksiyonlar yardımı ile kurulabilir. İlk önce şöyle bir fonksiyon yaratacağız:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$f$ 'nin gıcır olmama riskini taşıdığı tek nokta  $x = 0$  noktası. Öncelikle tümevarım ile fonksiyonun  $n$ 'inci türevinin aşağıdaki gibi verildiğini görmek olası:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \frac{e^{-1/x}}{x^{2n}}$$

Burda  $p_n(x)$  bir polinom.  $x$ , sıfıra giderken  $p_n(x)$  sabit bir sayıya,  $\frac{e^{-1/x}}{x^{2n}}$  ise sıfıra gider.

Şimdi  $F(t) = \frac{f(2-x)}{f(2-x)+f(x-1)}$  fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon  $x \leq 1$  için  $\frac{f(2-x)}{f(2-x)} = 1$ ,  $(1, 2]$  aralığında 1 ile 0 arasında,  $x > 2$  içinse 0 değerini alan bir gıcır fonksiyondur. Paydası sıfır değerini asla almaz çünkü  $f(2-x)$  ve  $f(x-1)$  aynı anda sıfır olamaz ve ikisi de her zaman pozitif değer alır. O zaman şapka fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz:

$$H : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], H(x-p) = F(|x-p|)$$

Bu durumda  $H$  fonksiyonu  $p$  etrafındaki kapalı birim diskte 1 değerini, 2 yarıçaplı kapalı diskle ve birim disk arasında kalan bölgede 1 ile 0 arasında bir değeri ve bu 2 yarıçaplı diskin dışında sıfır değerini alan gıcır bir fonksiyondur.

*Alıştırma 25.*

Simetri: Eğer  $(h, v)_p$  bir teğet vektör ise o zaman denklik ilişkisinin tanımından

$$D(h^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v = \text{br}_{T_p M}(v_{h^{-1}(p)}) = v$$

olduğundan  $(h, v)_p \sim (h, v)_p$  buluruz.

Yansıma:  $(h, v)_p \sim (g, u)_p$  olsun.  $D(h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))v = u$  olduğundan

$$\begin{aligned} D(g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))u &= D(g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p)) \circ D(h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))v \\ &= D(g^{-1} \circ h \circ h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))v \\ &= \text{br}_{T_p M} v = v \\ \Rightarrow (g, u)_p &\sim (h, v)_p \end{aligned}$$



Geçişkenlik:  $(h, v)_p \sim (g, u)_p$  ve  $(g, u)_p \sim (f, w)_p$  olsun. O zaman

$$\begin{aligned} D(f^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v &= D(f^{-1} \circ g \circ g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v \\ &= D(f^{-1} \circ g)(g^{-1}(p)) \circ D(g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v \\ &= D(f^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))u = w \\ &\Rightarrow (h, v)_p \sim (f, w)_p. \end{aligned}$$

*Alıştırma 29.* (1) Derste  $\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial f}{\partial x_i}$  olduğunu göstermiştik. O zaman bundan yola çıkarak  $r \in \mathbb{R}$ 'yi  $M$  üzerinde sabit değerli bir fonksiyon olarak görürsek  $\frac{\partial}{\partial x_i}(rg) = r \frac{\partial}{\partial x_i}(g) + 0$  olduğunu söyleyebiliriz.

(3)  $h, p$  çevresinde bir parametrizasyon,  $h(p) = p'$  olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(p) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ h(p')) + g \circ h(p') \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ h(p')) + \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ h(p')) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}f(p) + \frac{\partial}{\partial x_i}g(p). \end{aligned}$$

*Alıştırma 30.* Önce  $l(1) = 0$  olduğunu göstereceğiz. Bunun için yine  $1$ 'i manifold üzerinde sabit  $1$  değerli fonksiyon olarak alırsak

$$l(1) = l(1 \cdot 1) = 1 \cdot l(1) + 1 \cdot l(1) = 2l(1) \Rightarrow l(1) = 0.$$

O zaman derivasyon olmanın birinci özelliğini kullanarak  $l(c) = l(1 \cdot c) = c \cdot l(1) = 0$  buluruz.

*Alıştırma 33.* Bunun için daha önceki Alıştırma 7'nin çözümünde tanımladığımız parametrizasyonları kullanabiliriz. Yükseklik fonksiyonunun kritik noktalarının kuzey ve güney yarım kürede olduklarını biliyoruz. O noktalarla başlayalım. Kuzey yarım küre için

$$h_1 : D^2 \rightarrow S^2, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

parametrizasyonunda

$$f \circ h_1 = (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

olarak çalışan yükseklik fonksiyonunun gradyanı

$$\nabla(f \circ h_1) = \left( \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$$

bulunur.

Verilen  $(0, 0, 1)$  vektörünün  $(x, y, z) \in S^2$  noktasındaki teğet düzleme izdüşümü,

$$(0, 0, 1) - ((0, 0, 1) \cdot (x, y, z))(x, y, z) = (-x, -y, 1 - z^2)$$

olarak bulunur. Bu vektörün  $h_1$  parametrizasyonunun tersinin türeviyle aşağıya indiği vektör  $X(x, y) = (-x, -y)$  olur. Bu  $X$  vektör alanının  $f$  için gradyanımsı olması için, kritik noktalardan uzakta,  $X(f) > 0$  sağlanmalı:

$$X(f) = \nabla f \cdot X = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} > 0.$$

## Kaynakça

[Arno] Arnold, Vladimir I. Ordinary differential equations. Translated from the Russian by Roger Cooke. Second printing of the 1992 edition. Universitext. *Springer-Verlag, Berlin*, 2006.

[GiPo] Guillemin, Victor; Pollack, Alan Differential topology. *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.*, 1974.

[GoSt] Gompf, Robert E.; Stipsicz, András I. 4-manifolds and Kirby calculus. Graduate Studies in Mathematics, 20. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1999.

[Hatc] Hatcher, Allen Algebraic topology. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2002.

[Hirs] Hirsch, Morris W. Differential topology. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1976.

[Mats] Matsumoto, Yukio An introduction to Morse theory. Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito. Translations of Mathematical Monographs, 208. Iwanami Series in Modern Mathematics. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2002.

[Mil1] Milnor, John W. Topology from the differentiable viewpoint. Based on notes by David W. Weaver. Revised reprint of the 1965 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[Mil2] Milnor, J. Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[Munk] Munkres, James R. Topology: a first course. *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.*, 1975.

[Spi1] Spivak, Michael A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I. Second edition. *Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del.*, 1979.

[Spi2] Spivak, Michael Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus. *W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam* 1965.